

Ph.u.

293

od 16

N o v a e

*bei Tit. des nachstehenden
Pars I*

theoriae linearum curvarum,

originariae et vere scientificae,

Specimina quinque prima.

A u c t o r e

Carolo Christiano Friederico Krause.

E d i d i t

Professor H. Schroeder.

Cum figurarum tabulis XV.

Monachii, anno MDCCCXXXV.

Sumptibus editoris.

88. D.



Priscis temporibus homines, cum nondum ad cultum vitae traducti essent, ignem ligni durioris frictu suscitabant. Sapientes autem coelo devocant puriorem flammam, radiosque solis speculis aut vitris cogunt. Illis ignem accendentibus primum motus in materiâ crassâ et durâ et terrenâ, tum calor, demum lux: contra sapientibus coelestes radios colligentibus prima lux, deinde calor, postremo motus, quo durissima quaeque liquefaciunt. Idem in veritatis indagatione usu venit. Nam vel ab effectu ad causam, ab experimentis ad rationes tendimus, et cum Mose terga Dei intuemur, vel contrariâ viâ a primis ideis simplicissimis i. e. divinis attributis, velut rerum rationibus, liquidissimoque lumine exorsi prosequimur, veritates aeternas in nobis sese essentiae fontem proferentes mente haurimus.

Ex Leibnitii manu scriptis ineditis in Bibliothecâ Hannoveranâ.

Karl Christian Friedrich Krause's
handschriftlicher Nachlass.

[6.]

Herausgegeben

von Freunden und Schülern Desselben.

Zweite Abtheilung:

Mathematik.

I. Nova theoria linearum curvarum. *ally. Titel?*

P a r s I.

München, 1835,

in Commission bei E. A. Fleischmann.



Gedruckt bei Dr. Karl Wolf.

Part I

München, 1835.

in Commission bei E. A. Fleischmann.

Praefatio editoris.

Haec specimina quinque primordia sunt habenda longioris seriei operum de universa mathesi, quae clarissimus auctor manu scripta reliquit, in quibus haec novae theoriae curvarum initia maximam in partem ita elaborata inveni, ut statim prelo typographi subjici possent. Hac de causa theoriâ curvarum operi „de linea recta et de figuris rectilineis“ praemittendam existimavi, hujus primae partis continuationem quam primum publici juris facturus. Si quos errores apertos in manuscripto ultima manu auctoris carente inveniebam, eos emendare non dubitavi, sed inventa propria et verba hujus praestantissimi ingenii intacta atque religiose servata vulgari jussi. Ipse igitur nihil aliud mihi assumo, quam quod industriâ ac diligentia, quam ad hoc opus edendum adhibui, quanto scientiae amore tenear, testificatus esse mihi videor.

Quod figuras curvarum adtinet, eas secundum methodum originariam hoc modo confeci et delineavi: Assumptis unitatibus longitudinis et anguli secundum magnitudinem et formam lineae, quas mihi constitueram, assumptisque directione fundamentali atque longitudinis arcuum puncto initiali; seriei aptae longitudinum adtinentes angulos, aut viceversa seriei angulorum conjunctas longitudes, et differentias longitudinis et anguli, quae inde terminis quibusque proxime subsequentibus in hac serie intercedunt, ex functione lineae originaria calculo computavi, ita ut differentiae longitudinum satis parvae evenirent, quae cum conjunctis angulorum differentiis, nullo discrimine aliquis momenti inde enascente, rectae lineae construi possent. Revera quidem hoc modo polygonismus constructus est, attamen a linea vera tam paululum differt, ut jam primo aspectu curva ipsa appareat. Jam vero hic polygonismus major est polygonismo eo, qui laterum eodem numero et eadem proportionalitate cum iisdem angulis flexûs curvae inscribi, et minor simili eo, qui eidem circumscribi potest.

Quum in hoc libello in lucem emittendo versabar, pergratum mihi fuit comperire, alium Geometram, Dr. Peters Dresdensen, virum reverendissimum

in novâ theoriâ curvarum iisdem principiis originariis, quibus sequentia haec specimina nituntur, superstruendâ jam per aliquod tempus operam collocare. Cum enim Dr. *Peters* identitatem principii ex conspectu hujus libri, qui alii operi philosophico auctoris jam anno praeterito additus erat, cognovisset, primo quidem illius operis editorem *Hermannum de Leonhardi* amicum meum de hac re per literas adiit, postea vero mihi ipsi hanc epistolam scripsit, quam huc inserendam curavi; ceterum lectores commonitos velim, Dr. *Peters* auctoris nostri manu scripta nunquam inspexisse, et quod ego sciam, nec ab auctore ipso nec ab alio quoquam novi hujus theoriae curvarum principii ullam notionem antea accepisse:

Dresden, den 30. März 1835.

— — — — — Der Grundgedanke beider Methoden ist nach jener Anzeige, die dem im September v. J. erschienenen ersten Bande der Religionsphilosophie beigegeben wurde und wodurch ich die erste Kunde von Krause's Princip und Verfahren erhielt, offenbar derselbe. Ob meine Entwicklung dieses Gedankens in den Grundzügen mit Krause übereinstimmt, kann ich nach jener Anzeige nicht sicher entscheiden. Ich gab Leonhardi, wie Sie wissen werden, sogleich nach ihrem Erscheinen Nachricht von meinen Arbeiten; nach den mir darauf von diesem vortrefflichen Manne in seiner gewohnten freundschaftlichen Weise mitgetheilten Andeutungen scheint meine Art der Untersuchung von der Krause'schen verschieden zu seyn; ganz klar ist nur, dass der wissenschaftliche Gang abweicht, und dieser Umstand wird zur schnelleren Verbreitung der Methode beitragen. Ich verspreche mir Grosses von Krause's Arbeit, und würde die meinige nicht unternommen haben, wenn ich bei dem ersten glücklichen Schritte, den ich that, von der Identität unserer Entdeckungen unterrichtet gewesen wäre. Dann hätte ich die Herausgabe von Krause's Untersuchungen abgewartet. Krause, dessen Verlust wir nicht genug beklagen können, war unstreitig einer der tiefsinnigsten und umfassendsten Philosophen aller Zeiten, seine Forschungsweise ist, besonders wo er sie auf formale Stoffe anwendet, bewunderungswürdig und höchst eigenthümlich, und ihre Idealität kann unserer Zeit nicht genug empfohlen werden.

Eben so unabhängig Krause's Forschungen von den meinen sind, sind es diese von jenen; beide werden den Stempel der Ursprünglichkeit an der Stirne tragen. Der Umstand, dass zwei Verschiedene unabhängig von einander dieselbe oder doch die ähnliche Entdeckung machten, bezeugt das Zeit-

gemässe derselben in der Fortbewegung der Wissenschaft, und veranlasst hoffentlich schnellere Beachtung und ernstere Prüfung der neuen Standpunkte. Dass übrigens Krause seine Entdeckungen früher gemacht hat als ich, unterliegt keinem Zweifel. Krause ruhte schon länger als ein Jahr im Grabe, als ich den ersten Buchstaben meiner Arbeit schrieb. Zu dieser Zeit, im December 1833, beschäftigte ich mich mit dem Versuche, die synthetische Methode der Alten systematisch zu begründen, durch Mitankwendung der Rechnung zu erweitern und ihr Gebiet ins Unendliche auszudehnen. Ich construirte und berechnete neue Curven nach dieser Methode u. s. w. Aber immer wieder drängte sich das Gefühl ihrer Unzulänglichkeit, das Bewusstseyn von der Relativität dieser sowie der Coordinaten-Methode und damit das Bedürfniss einer sachgemässeren Behandlung hervor. Schon Jahre lang hatte ich den Grundgedanken hierzu deutlich aber unfruchtbar mit mir herumgetragen; jetzt fühlte ich mich angespornt, diesen alten Curven-Gedanken wieder hervorzuziehen, und ihn hartnäckiger, als es schon einmal früher geschehen war, zu verfolgen. Es gelang, und ich theilte einem mathematisch-philosophischen Freunde, Carl Snell, die erste gelungene Entwicklung mit. Er war einverstanden damit und feuerte mich zur Fortsetzung an; ein vorge-rückter damaliger Schüler, Leonard Collmann aus London, zeichnete unter meiner Leitung die neuen Linien, während ich fortarbeitete. Später, nach $\frac{3}{4}$ Jahren, erfuhr ich plötzlich, dass die neue Curven-Methode, womit Krause in den letzten Jahren seines Lebens beschäftigt war, mit der meinigen verwandt oder dieselbe sey. Weder in mündlichen noch schriftlichen Mittheilungen hatte Krause jemals ein Wort über das Wesen seines Principes oder seiner Methode gegen mich geäussert; auch ist mir in dem, was ich von Krause's Schriften gelesen, keine Andeutung dieser Art zu Gesichte gekommen, obgleich, wie Leonhardi schreibt, Krause schon viel früher (1802) hierher gehörige Winke und Elemente druckschriftlich mitgetheilt hat, die daher wenig bekannt geworden seyn müssen, oder doch nicht gehörig beachtet worden sind. Ich war daher sehr überrascht, theils schmerzlich, weil ich mich für den ersten und einzigen Entdecker hielt, theils angenehm, indem ich einerseits von einem Andern der Methode dieselbe hohe Bedeutung beigelegt sah und dieser Andere Krause war, andererseits der Wissenschaft, der ich mit begeisterter Neigung anhänge, desto mehr Vorschub geleistet wird.

Krause's mathematischer Nachlass enthält, wie mir Leonhardi in ausführlicher Angabe der Gegenstände der Forschung mitgetheilt hat, noch viele

Reichthümer, die mich äusserst schätzbar dünken. Doch bin ich am begierigsten auf die Erscheinung der besprochenen Schrift, um sie sogleich nach erfolgtem Drucke der meinigen (die unter dem Titel: Neue Curvenlehre, diesen Sommer herauskommt) mit dieser vergleichen zu können. Möchten wir zum Besten der Wissenschaft bald durchdringen! Eine mächtige Wirkung und zwar auf die ganze Mathematik kann nicht ausbleiben, geschehe sie nun früher oder später; um dieses einzusehen, bedarf es keines Prophetenblickes. — — — — —

Hunc librum, quem nunc Geometrarum iudicio submitto, partem esse editionis omnium operum, quae de universâ scientiâ auctor inedita reliquit, titulus ipse jam indicat. Ad quae opera edenda quum post mortem auctoris aliquot ejus amici et discipuli nos conjunxissemus, et defuncti amicos et scientiae fautores ad hanc editionem symbolis suis promovendam invitassemus, ea quidem res hucusque ex votis nobis cessit; sed quo hujus libri emissionem magis accelerarem, ipse sumtus suggesti, et me felicem praedicabo, si quid ad gloriam viri immortalis, cujus nomen inter illustrissima illa *Pythagorae, Platonis, Cartesii, Newtonis, Leibnitii* et aliorum certe aliquando cum praestantia celebrabitur, pro mea parte contribuero. —

Monachii, mense Majo anni MDCCCXXXV.

HENRICUS SCHROEDER,

professor in instituto polytechnico Monacensi.

Praefatio auctoris.

Theoriae curvarum initia, quae sequentibus quinque speciminibus Geometrarum judicio exhibeo, excerpta sunt ex opere majori, quod de hac re proxime decennio exaravi. Theoria ipsa a me inventa fuit anno 1799. Cum enim viderem, curvarum theoriam vulgarem scientiae ideae non satisfacere, quippe quae non e curvae lineae ipsa natura sed potius e variis externis curvae lineae relationibus peteretur, constitui jam tunc, secundum generalis scientiae organi principia altissima curvarum linearum genuinam s. originariam et vere scientificam theoriam eruere atque conformare. Inventis ergo genuinis definitionibus magnitudinis, spatii, lineae, lineae rectae et lineae curvae, itemque anguli et curvedinis, quae definitiones hic exhibentur (§§is 7, 1, 11, 17, 18, 20, 30 ss. 64), jam ante hos triginta annos primum circuli originariam theoriam perfecui, qualis nunc specimine secundo exponitur, eandemque discipulis meis publice tradidi in praelectionibus de Mathesi pura, quas annis 1802 — 1804 Jenae habui; mentionem deinde hujus theoriae circuli feci in libro: Tagblatt des Menschheitslebens, Dresden 1811; No. 1 des literarischen Anzeigers p. 3. Principium vero etiam heuristicum analogiae theoriae curvarum et theoriae polygonismorum (§. 37) rectilineorum generalis jam anno 1798 detexi, theoriam deinde generalem polygonorum, quae inde fluit, et hic (§§is 39 — 42) indigitatur, cum discipulis meis in dictis praelectionibus et ore et scriptis communicavi, ac in dissertatione mea: de philosophiae et matheseos notione, earumque intima conjunctione (Jenae, 1802) indicavi. *) Deinde ab anno 1802 et theoriam polygonismi rectilinei atque lineae rectae et curvae planae atque curvae duplicis curvaturae, gradatim, et geometricae et analyticae, excolui, omneque otium, quod per alia mihi reliquum fuit, huic negotio devovi, itaque theoriam constructionemque linearum, quae secundum hanc originariam theoriam meam sunt primi et secundi gradus algebraici, deinde etiam curvarum planarum, quae de functionibus trigonometricis aut logarithmicis dependent, absolvi annis proxime praeteritis, eandem theoriam, uti primum tempora permittant, publici juris facturus.

*) De genuina curvas considerandi methodo, a me inventa, disserui quoque in libro: Anleitung zur Naturphilosophie, Jenae 1804, p. 127 ss.

Secundum methodum a me inventam originariam lineae curvae ita dividuntur in classes, genera atque species, uti id ex curvitudinis essentia legibusque profluit, ita ut earundem genuinus organismus nunc primum in lucem protrahatur. Sed genuina haec curvarum divisio, ab omnibus divisionibus per omnes, adhuc excultas methodos factis, diversa est. Sic verbi causa lineae, quae secundum methodum originariam sunt primi gradus algebraici, sunt circulus et antiloga (specimine quinto tractata), secundi vero algebraici gradus lineae sunt numero novemdecim, inter quas tamen et circulus et antiloga recurrunt (conferatur §. 65); quae lineae omnes, excepto circulo atque ejus evolvente (quam specimen quartum exhibet) Geometrarum quantum scio omnium notitiam hucum plane effugere, atque secundum methodum coordinativam sunt lineae transcendentes.

Sed contra inter lineas, quae secundum originariam methodum per functiones trigonometricas puras construuntur, sunt plures e lineis secundum methodum coordinativam transcendentibus, uti cyclois, quae est sinussois originaria, et logarithmica vulgaris, itemque sectiones conicae Apolloniana, quarum generalem aequationem ope aequationis earundem differentialis generalis primus detexi, quae est:

$$dl = \frac{a \sqrt{a \cdot b}}{2} \cdot \frac{dw}{(a \cdot \cos.^2 w \mp b \cdot \sin.^2 w)^{\frac{3}{2}}} \dots (\alpha)$$

denotantibus a axim majorem, b parametrum, l longitudinem arcus, w angulum arcus l internum s. angulum flexus (§. 34) ad arcum l pertinentem.

Quae aequatio aequipollet sequenti:

$$dl = \sqrt{2} \cdot a \cdot \sqrt{a \cdot b} \cdot \frac{dw}{((a \pm b) \cos. 2 w \mp a \mp b)^{\frac{3}{2}}} \dots (\beta)$$

ubi in aequationibus (α) et (β) signa superiora ad hyperbolam inferiora ad ellipsim pertinent.

Ex his formulis (α) aut (β) prodit etiam, facto axi $a = \infty$, specialis formula parabolae, nempe

$$dl = \frac{b}{2 \cos.^3 w} \dots (\gamma) \text{ aut } \frac{\sqrt{2} \cdot b}{(\cos. 2 w \mp 1)^{\frac{3}{2}}} \dots (\delta)$$

Formula (δ) etiam ad formulam (γ) recurrit, quia $\frac{\cos. 2 w \mp 1}{2}$ est $= \cos.^2 w$.

Ex formula vero (γ) invenitur integrando:

$$l \text{ (parabolae)} = \frac{b}{4} \left(\frac{\sin. w}{\cos.^2 w} \right) + \frac{b}{4} \log. \text{ tang. } \left(45^\circ + \frac{w}{2} \right) + \text{constans} \dots (\epsilon)$$

Quae aequatio (ϵ) ergo est parabolae Apolloniana aequatio originaria.

Formulae (α) et (β) analogiam quandam habent cum formula sectionum conicarum generali polari, quam inveni esse;

$$z = \mp \sqrt{\frac{y^2}{\mp 1 \pm \left(1 \pm \frac{y^2}{a^2}\right) \cos.^2 \varphi}} \dots (\varphi)$$

denotante z radium vectorem, φ angulum ejusdem polarem, $a = \frac{a}{2}$, a axim majorem, b parametrum, y dimidium axim minorem.

Quae aequatio (φ) aequipollet aequationi:

$$z = \mp \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{b}{\mp a \pm (a \pm b) \cos.^2 \varphi}} \dots (\psi)$$

ubi in denominatore signa superiora ad hyperbolam, inferiora ad ellipsim spectant. Unde elicitur pro parabola

$$z = \frac{\frac{b}{2}}{\pm 1 \mp \cos. \varphi} = \frac{b}{\pm 2 \mp 2 \cos. \varphi}$$

Quod vero adtinet ad curvas eas, quae functionibus mere logarithmicis determinantur, eae sunt infinito multorum ordinum, generum et specierum, sed earundem simplicissimae sunt $l = b \text{ } ^a\log. w$ atque $w = b \text{ } ^a\log. l$, quas exemplorum loco memoravi §§. 66 et 67. Harum quidem una, $w = b \text{ } ^a\log. l$, secundum aequationem polarem $\varphi = b \text{ } ^a\log. z$ expressa primum inventa est a *Cartesio* *), deinde vero primum accurate pertractata a *Wallisio* **). Alteram vero, quae est $l = b \text{ } ^a\log. w$, adhuc a nemine reperi tractatam.

Matheseos historia edocti scimus, omnes principales hujus scientiae progressus a philosophis viris factos esse a *Pythagora* atque *Platone* usque ad *Cartesium* et *Leibnitium*; et in specie initia scientifica Geometriae analyticae *Cartesio* praecipue deberi notum est. Quin etiam mea haec curvarum originaria theoria et methodus per metaphysica principia et organi scientiarum generalis supremas leges, ergo ope philosophiae, a me et inventa et exulta fuit, unde vis organica, quam philosophia ad Mathesin quoque excolendam imo constituendam exserit, vel in hoc exemplo haud spernendo, elucet. Imo per hoc meum inventum, quod Geometrae mox altius excolent, ac licuit mihi (multis aliis studiis, rebusque infaustis impedito), tota regenerabitur Geometria, et ad altius doctrinae et pulchritudinis perducetur fastigium, idque multo citius, ac id per *Cartesii* methodum coordinativam et polarem fieri po-

*) Videantur ejus Epistolae, Tom. I, lettre 73 en 1638.

**) Videatur haec tractatio in ejusdem operibus. Conferatur de hac re *Montucla* hist. des Math. Tom. II, p. 45.

tuit, atque olim fieri potest. Nam et theoria curvarum duplicis curvaturae, superficierum curvarum, solidorumque aut planis aut curvis superficiebus circumscriptorum secundum hanc polygonismorum rectilineorum, curvarumque methodum, via simplicissima, summaque claritate, super novo fundamento, felicissime perficietur.

Methodus haec mea originaria comprehendit etiam sub se omnes alias methodos mediatas, quae vel jam usitatae sunt vel adhuc excoli merentur, uti coordinativam methodum generalissimam et coordinatarum rectarum vel curvarum, et polarium. Et datur formula generalis, cujus ope curvarum functiones secundum definitam ab originaria diversam methodum confectae reducuntur ad expressionem functionalem eam, quae eidem curvae secundum methodum originariam discutiendae respondet; et viceversa. Ejusmodi reductionis formulae principales, quibus hucdum usus sum, v. gr. ad formulas generales sectionum conicarum, logarithmicae vulgaris, cycloidos, cissoidos, et aliarum curvarum originarias detegendas, exhibebuntur in opere majori, cujus antea mentionem feci.

Quod specimina quinque sequentia adtinet, in iis elaborandis studui quidem sommopere perspicuitati, demonstrationumque evidentiæ; cum tamen ea excerpta sint ex opere meo majori, supra memorato, fieri non potuit, ut theoremata geometrica omnia, quae ad demonstrationes perficiendas hic requiruntur, inde transcriberentur, quae ergo hic ut lemmata supponi debebant; sed sunt ea theoremata tritissima, omnibus nota, e. gr. theorema pythagoricum, et quaedam formulae analyticae simplices.

Quod reliquum est, spero, viros doctos Geometras, philosophico ingenio praeditos, haec qualiacunque specimina benevolenti animo inspecturos, apteque de hac re ad Geometriam perficiendam gravissima judicatuuros; quae vero ibi imperfecta invenerint, ea benigne condonatuuros, saltem auctoris incuriae non tributuros.

Ut vero primum, favente Deo, faventibusque hominibus, totam hanc theoriam publice exponere potero, opus aliquantum excultius perhibere spero, quod et rei ipsi, et scientiae dignitati et Geometrarum expectationi melius satisfaciat.

Monachii, calendis Novembribus anni MDCCCXXI.

Carolus Christianus Fridericus KRAUSE,
Philos. et Mathes. Doctor.

Specimen primum.

Protheoria generalis.

1847
The following is a list of the specimens of the
Prothecia generis, which have been
examined by me, and found to be
new species.

Specimen primum.

Prothecia generis.

The first specimen of the Prothecia
generis, which I have examined, is
a new species, and is named
Prothecia generis.

Prothecia generis.

Prothecia generis.

Prothecia generis.

Sectio I.

De spatio, superficie, linea et puncto.

§. 1. Spatium est modus essentiae et existentiae, seu forma objectiva materiei corporeae, quatenus haec in se per totam suam essentiam est et subsistit eadem et tota, omnis et una, et quatenus in se est omnes sui partes. Sive aliis verbis: spatium est forma naturae ipsius, quatenus ea est corpus s. corporea. Quare subordinato respectu recte dicitur, spatium esse formam objectivam materiae, in qua materiae partes, quales, simul sunt in materiae toto. Jam vero omne, quod et quatenus in se unum et idem est, continuum vocatur; ergo materia, quatenus in se una et eadem est, continua esse dicitur. Et cum omnis forma ejus rei, cujus forma est, naturam sequatur, spatium et ipsum in se unum et idem, hoc est continuum est. Cum porro materia ipsa sit divisibilis per omnem suam essentiam quatenus una est et eadem, ergo et spatium, ut materiae forma, est continuo divisibile. Et cum materia sit in suo genere totum unicum et absolutum, omne et universum, supra omnes suos limites internos existens, extra quod simile non datur, hoc est, cum natura, quatenus corporea est, sit in se infinita: item spatium in suo genere est totum infinitum, nihilque adeo est ejusdem generis extra spatium.

Spatium ut objectiva materiae forma objective existit, et quidem simul ut forma naturae externae, quatenus ea materia est, et ut forma naturae internae, (der Welt der Phantasie) in qua et cujus ope naturam externam, ut spatio extensam materiam, interne, nempe mente et phantasia, repraesentamus, ita, ut repraesentatio interna materiae et spatii congruat cum materiae spatiique natura objectiva; in qua congruentia etiam omnis Geometriae evidentia et aptitudo objectiva practica nititur. —

§. 2. Sed ea, quae modo dicta sunt, ad metaphysicam spatii deductionem faciunt, et in organica summae scientiae partis doctrina (in der Grundwissenschaft) demonstrantur. *) Sed spatium etiam concipitur et concipi debet immediata intuitionem, quae, qua talis, deductione metaphysica non eget, sed cum eadem debet conjungi, ut spatii fiat scientifica constructio, hoc est, ut Geometria efformetur. **) Quam immediatam spatii intuitionem cum deductiva spatii cognitione consentire videbit, quicumque eandem intus produxerit.

*) Hujus doctrinae initia docui in libro: Vorlesungen über das System der Philosophie, Göttingen, 1828.

**) Deductionem, intuitionem immediatam, et constructionem esse tria momenta determinationis, per quam omnis scientia formetur, docui in libro modo allegato; p. I. pag. 328 ss. (videatur de spatio, p. I. pag. 336); pariterque in libro: System der Logik, 2. Ausgabe 1830, S. 75 ff. et in libro: Anleitung zur Naturphilosophie, Jena 1803. S. 85 ff.

§. 3. Spatium in suo genere infinitum atque continuum, infinite et continue ad intra determinabile sive finibile est; quia determinationis et limitationis categoria, docente Metaphysicâ, de omni re ad intus valet; unde et materia et ejusdem forma spatium, ad intus determinationis et limitationis capax est. Spatium ergo, quatenus est in se unum, totum et omne, et in suo genere absolutum, finibus seu limitibus nullis et nullo respectu circumscribitur; sive: spatium non habet limites seu fines circum se, quibus quasi circumdetur; sed habet omnes fines et limites suos intus et intra se, et quidem infinitos. Hanc spatii determinabilitatem internam intuitio spatii immediata ante mentis oculum exhibet, atque in Geometriae scientiam excolit.

§. 4. Immediatâ hac spatii intuitione edocti scimus, spatii primum internum limitem esse superficiem. Jam cum spatium sit unum in se et omne et ejusdem qualitatis, s. homogeneous et continuum, ergo et superficies ut spatii limes atque forma interna necessario erit una, continua, homogenea, identica et infinita. Intuitio vero immediata ostendit, superficiem, quatenus ea est mere continua atque simul identica, esse planam, s. planum. —

Jam cum in omni re materia et forma distinguantur, ergo etiam superficies habebit et materiam (Gehalt), et formam (Gestalt) peculiarem. Est vero omnis limitis et limitationis, non ejus solum quae spatii est, forma directio (Richtung, Richtigkeit), quae itaque in superficie plana necessario, uti superficies plana ipsa, continua, homogenea, identica et infinita erit. Superficiei vero materia est extensio, qua spatium in se determinatur et definitur primum; sive: superficies est extensio limitativa interna spatii, eaque suprema.

Porro cum spatium essentiâ sua sit continuo unum et idem, attamen, uti omnia, in se debeat esse diversum, idque unice limitatione; sequitur primam spatii diversitatem dari per superficiem, eamque planam. At cum superficies plana sit qua talis ipsa identica, superficies vero debeat etiam esse in se diversa, sequitur etiam dari superficiem in se diversam s. non planam. Jam vero cum in superficiei materiâ (in ihrem Gehalte), s. in extensione citra formam s. directionem spectatâ, nulla insit differentia, sequitur, omnem superficiei, qua talis, differentiam in ejusdem formâ, nempe directione, inesse. Dabitur ergo superficies, cujus directio continuo diversa est, s. continuo alia s. varia. Ejusmodi superficies ab intuitionem immediatâ perhibetur, vocaturque superficies curva. Superficies quidem plana ob identitatem continuam infinita est; at curvae superficiei natura cum continuo mutari finitatem involvat, non prorsus et absolute infinita erit; id quod justo loco accuratius dignoscendum est. Et cum superficies plana ut mere et absolute identica constituatur, ejusdem genera et species dari nequeunt; sed curvae superficiei natura cum in eo sit, ut ejus directio sit continuo alia s. diversa: in hac ergo diversitate porro et identitas et diversitas locum habet.

§. 5. Cum omnis rei finitae, quae continetur in toto suo, relatio sit ad hoc totum suum, eaque, quatenus ad totum, quod supra rem finitam sibi internam est, externa: sequitur, etiam superficiem quamlibet vel planam vel curvam habere directionem externam ad spatium infinitum, seu ad totum suum, cui inest. Directionem autem internam vocamus formam (Gestalt oder Form), externam vero positionem (Lage). Et cum omnis superficies ulterius possit et debeat determinari in partes suas internas, etiam hae internae partes habebunt positionem definitam ad se invicem, ad superficiem totam et universam, imo etiam ad spatium infinitum. —

§. 6. Cum spatium ipsum, qua tale, hoc est per omnem ejus essentiam, sit determinabile, idque omni modo, quem ejus natura admittit: potest ergo spatium definiri et ad intra determinari et limitari ubique per superficies et planas et curvas numero et positione infinitas. Quare dantur in spatio superficies et planae et curvae numero et positione infinitae.

§. 7. Omnis res, cujusvis essentiae s. naturae, quatenus definitis continetur limitibus, quantum (eine Grösse, ein Grosses) vocatur; haec vero ipsa proprietas (Eigenschaft,) quantitas (Grösheit) vocatur. Infinitum ergo ipsum non est quantum, sed potius totum et omne, neque habet quantitatem, sed totitatem, sit venia verbo, et omnitudinem (Ganzheit und Allheit). Quare omne quantum, qua tale, cum sui generis infinito toto, qua tali, quoad quantitatem conferri non potest.

§. 8. Cum omne id, quod in suo genere infinitum et omne et continuum est, infinito modo limitari possit, sequitur, eidem inesse quanta numero infinita, eademque nonnisi per limitum diversitatem diversa. Quae si, qua talia, hoc est quantitate, sint eadem, vocantur aequalia, sin minus, inaequalia s. diversa, secundum categoriam relationis. Quantitas adeo relativa magnitudo vocari solet, quantumque relativum vulgo magnum dicitur. Quodsi ergo quanta relativa seu magna inter se conferantur, aut quanti materia (Gehalt) sive id quod intra definitos limites continetur, in iisdem eadem est, si fuerint aequalia, aut diversa, si fuerint inaequalia, quo casu alterum erit eadem materia, quam et alterum continet, et praeter hanc etiam alia, sed eadem qualitate, — idque vocatur relatum ad alterum magnum sensu eminenti, s. majus, alterum vero parvum s. minus. Quamvis omne quantum et magnum qua tale non habeat relationem magnitudinis ad sui generis infinitum, nihilominus tamen ad idem infinitum se habet ut aliquid reale ad aliud reale homogeneum altioris ordinis s. gradus, cui infinitis aut saltem pluribus vicibus inest; minime vero ut nihil ad aliquid. —

§. 9. Spatium ergo ipsum, qua tale, et quatenus est in suo genere infinitum et omne, plane non limitatum (§. 1), proprio et genuino sensu non est quantum, neque magnum (§. 7 et §. 8). Cum vero spatium sit ad intra infinito modo determinabile (§. 3), intus habet quantitatem et magnitudinem, eamque continuam et infinite divisibilem (§. 3). Omne igitur finitum spatium, quod in spatio infinito ut ejusdem pars continetur, est quantum atque magnum. Et cum spatium sit in se absolute infinitum, — finitum spatium, quo non detur et majus et minus, non datur. —

Idem valet de superficie plana et curva, quatenus ea infinita est, atque in se determinabilis et in partes continuo divisibilis. —

§. 10. Jam vero superficies, quatenus est spatii limes internus, plane diversa est a spatio ipso; hoc est: spatii infiniti et absoluti extensio superficiei non competit. Quare spatium ipsum non compositum est sive constat ex infinite multis iisque infinitis superficiebus, neque magis finitum spatium generatur sive oritur infinite multis superficiebus finitis. Neque ergo superficies oritur spatio ipso continuo imminuto, et ad valorem $= 0$ redacto, ut esset superficies $= 0 \times$ spatium.*) Sed superficies, uti est objectivus limes spatii internus, quoad spatium finitum formandum dupliciter spectari potest ac debet, hoc est: aut ut constructionis finis, aut ut ejusdem initium. —

*) Ad hoc non respexit vir ceterum acutissimus, et de Mathesi meritissimus Fischer in libro: Ueber den eigentlichen Sinn der höhern Analysis. (Berlin 1808).

Nihilominus tamen superficies ut spatii forma interna et limes internus spatio naturā similis esse debet, ut omnis forma materiae suae; sive: superficies in se habet naturam spatii, quatenus nempe superficiei natura definita spatii essentiam capit. Ergo superficies et ipsa est in se, in suo genere infinite extensa, infinite determinabilis et definibilis, diversitatisque per finium internorum diversitatem constitutae capax. (§. 3). Uti ergo spatium formam internam et litem habet superficiem, ita superficies formam internam et litem habet definitum, quem vocamus lineam. Hic igitur limes superficiei non est circum superficiem infinitam, sed intra eandem. Porro uti superficies est quidem extensio naturā sua finita, extensionem absolutam limitans: ita et superficiei limes, qui est linea, erit quidem extensio, sed extensio extensionem superficiei limitans. Uti itaque spatium non componitur superficiebus, sed tantum, quatenus in se finita spatia continet, superficiebus circumscribitur: ita etiam superficies non componitur lineis, sed, quatenus in se finitas superficies continet, iisdem circumscribitur. Hic vero limes internus superficiei proprie ipsius spatii limes internus est; quare etiam hic superficiei limes, nempe linea in se essentialiter et immediate in spatio existit, et ita cogitandus est, ut spatii ipsius limes, sine superficie. —

§. 11. Est ergo linea limes spatii internus post superficiem secundus, qui simul et superficiei limes internus est. Extensio superficiei est uno respectu finita, lineae vero extensio duplici; ita ut spatium in se sit atque contineat extensionem superficiei et lineae, superficies vero extensionem lineae. Neque vero spatium conficitur superficiebus (§. 10) vel lineis, neque superficies lineis. Neque ergo magis linea est spatii aut superficiei valor $= 0$; nam cum linea ad spatium et superficiem non habeat relationem partis vel quanti, ergo etiam non magis relationem partitivam seu quantitativam finalem $= 0$ habere potest.

§. 12. Hic exoritur quaestio, utrum spatii determinabilitas, per limites se continuo excipientes ejusmodi, uti per superficies et lineas, progrediatur in infinitum? Quo in genere possem quidem demonstrationem afferre metaphysicam, qua adstruitur, litem spatii gradu secundum, h. e. lineam, esse quidem denuo intus determinabilem limite seu fine, sed eo absoluto, hoc est eo, qui omni spatii essentia, extensione nempe, careat. Sed, cum haec demonstratio lemmata nimis alta, eaque non pauca, ex metaphysica (aus der Grundwissenschaft) requirat, idcirco hic omittenda fuit. —

At ipsa spatii immediata intuitio (§. 2), quae menti sine omni deductione metaphysica obversatur, ostendit, lineam esse adhuc determinabilem intus puncto, quod quidem sit extensione omnino carens, ideoque neque infinitum, neque magnum neque parvum, sed limes spatii absolutus. Eademque immediata intuitio confirmat, quod limitis cognitio idealis docet: punctum non esse partem lineae, neque superficiei, neque spatii; ideoque neque spatium, neque superficiem, neque lineam constare punctis; simulque puncti intuitio docet, ipsam non egere intuitionem lineae, neque superficiei, sed potius unice egere intuitionem spatii ipsius. —

Jam cum punctum sit limes internus et lineae, et superficiei et spatii ipsius, idem etiam spectari debet, aut ut finitae lineae, superficiei et spatii initium, vel ut finis; e. gr. ut initium vel finis lineae rectae finitae, plani finiti, aut spatii finiti, ut coni vel cubi. Neque tamen punctum est aequale valori $= 0$ aut lineae, aut superficiei aut spatii finiti. Cum enim punctum ab his prioribus gradu spatii limitibus internis et a spatio ipso sit essentia seu genere diversum, neque ergo relationem partis quantitativae ad eosdem limites aut ad spatium habere potest, neque ergo erit earundem valor $= 0$.

Neque tamen punctum est plane nihil, cum sit limes, imo limes internus absolutus, mere formalis, sine omni materia (ohne allen Gehalt); quod esse, sane est aliquid. Similiter ex his, quae modo dicta sunt, patet: spatium habere extensionem triplicem, superficiem duplicem, lineam simplicem, punctum vero nullam. Sive: spatium habere dimensiones tres, superficiem duas, lineam unam, punctum vero nullam.

§. 13. Sed respiciamus ad lineam, ejusque definitionem. Est vero linea extensio simplex, limes internus et spatii, et superficiei, ipse ad intra limitabilis puncto.

Jam cum spatium et superficies, quorum limes internus linea est, sint in se una, tota, et in suo genere infinita quoad materiam et homogenea et identica: haec omnia etiam insint lineae necesse est; quae ergo etiam habet materiam, nempe extensionem simplicem, et formam, nempe directionem. Et uti spatium et superficies determinabilia et divisibilia sunt modo infinite vario, et continuo: idem etiam de linea valebit, sed tantum simpliciter, quia linea non est, nisi extensio simplex.

Linea vero quatenus mere et absolute est homogenea et identica, ita ut ejus partes a linea tota et inter se mera quantitate differant, identica s. recta vocetur, intuitioque eandem immediate perhibet.

§. 14. Omnis materia lineae s. essentia, quatenus formae opponitur, est extensio simplex, forma vero directio simplex. Extensionem autem simplicem, qua talem, longitudinem vocamus. Extensio lineae, quatenus identica est, in suo genere tota et omnis, et infinita est, quia extensio simplex lineae spatii ipsius, infinite extensi, extensio est. Ergo linea recta, nempe mere identica, in suo genere absolute infinita est quoad ejus materiam, formae oppositam, h. e. quoad longitudinem.

§. 15. Directio lineae interna est et externa; interna quidem, quia linea recta, proximo respectu in se est essentiale suum, nempe extensio spatii simplex; at etiam externa, quia linea in spatio et in superficie ut limes internus inest, quare etiam ad utrumque necessario refertur seu dirigitur. Interna lineae directio, per quam ad se ipsam refertur, vocatur lineae forma propria (ihre Gestalt oder Form); externa vero directio ejus positio externa, seu positio (Lage) simpliciter vocatur. Et cum linea quaevis sit in se infinite determinabilis et divisibilis, ideoque constet infinite multis partibus definite magnis, directio ejus interna simul complectitur partium omnium relationem inter se et ad lineam ipsam universam. Cum denique omnis lineae pars quaelibet, seorsim sumpta, uti et partes quaelibet simul sumptae, etiam immediate insint et spatio et superficiei, sequitur: et cuivis parti cujusvis lineae et cuivis partium congeriei competere directionem s. positionem definitam respectu cujuslibet superficiei, cui insunt vel non insunt, et respectu spatii universi, cui omnes insunt; simulque patet, hanc partium directionem externam definiri totius lineae materiali formalique constitutione, hoc est longitudine et directione ejus interna, atque naturâ eorum, ad quae extus referantur. Et cum in spatio dentur spatia infinita innumera, et superficies finitae innumerae, quaevis linea habet etiam directionem externam seu positionem definitam versus omnia spatia finita, superficies, lineas et puncta in spatio.

§. 16. Omnis ergo lineae natura est in ejus materia seu longitudine, et in ejus forma, seu directione; sive: omnis definita linea definite longa et definite directa est; neque linea est aliud quidquam praeter haec duo momenta. Sive etiam: linea est simplex extensio cum extensionis forma etiam simplici definita, h. e. longitudo cum directione. Et cum longitudo seu extensio simplex sit rei essentia, directio vero ejus-

dem forma, patet, *primarium* lineae momentum esse longitudinem, *secundarium* vero directionem.

§. 17. Jam cum *recta* linea mere et absolute identica sit (§. 13), sequitur, eam esse identicam et secundum longitudinem et secundum directionem, sive eam habere plane homogeneam et longitudinem et directionem; ergo directionem unam, unicam, continuo eandem, non mutabilem, idque per omnem essentiam, h. e. per omnem extensionem infinitam (§. 16) s. per omnem longitudinem infinitam suam. Rectitudo ergo lineae posita est in directionis identitate, unitate, simplicitate. Longitudo enim, ut lineae materia, formae opposita, in omnibus lineis identicis et non identicis, semper eadem est, neque qualitativam diversitatem ullam admittit. —

Ex his sequitur etiam, *externam* rectae lineae directionem seu positionem ad spatium, ad quamlibet superficiem, lineam, et ad quodlibet definitum punctum esse identicam, quoad lineam rectam ipsam. Et quidem spatium ipsum in se plane identicum est, uti et superficies plana (§. 4) pariterque linea recta; quare directio lineae rectae respectu spatii, superficiei planae cujuslibet, et lineae rectae cujuslibet, plane identica est, etiam quoad terminos, ad quos refertur. Sed cum dentur superficies non planae (§. 4), lineaeque non identicae h. e. non rectae, patet, neque rectam lineam habere posse ad hos terminos non identicos, partesque eorundem non identicas, positionem identicam.

§. 18. Cum in extensione ipsa, qua tali, nulla insit diversitas (§. 1), etiam lineae, quatenus mere extensa est, nulla diversitas seu oppositio inest. Sicuti potius in omni extensione ejus diversitas solummodo in ejus forma, seu modo essentiae, consistit, atque se exserit, hoc idem in linea deprehenditur. Ergo omnis antithesis seu diversitas, quae ideae lineae inest, in directionis consistit diversitate, et quidem directionis internae, quippe quia nunc de linea in se spectata agitur. Sed linea plane et mere identica seu recta directionem internam plane eandem s. identicam habet, ergo ejus idea nullius antitheseos capax est. Sed uti in linea recta directio semper est eadem et unica, ita contrahitur linea, quae modo plane oppositivo, identitati plane contradictorio, extensa est; hujus ergo directio plane non identica est, plane non unica, h. e. per totam lineae essentiam sive extensionem simplicem continuam continuo alia seu diversa, ita ut nulla ejusmodi lineae existat pars continua, cujus interna directio sit una eadem et unica, h. e. cujus nulla pars, quantumvis parva, recta sit. Intuitio immediata etiam talis lineae imaginem exhibet, eandemque vocamus lineam curvam. Lineae ergo curvae essentialiale proprium characteristicum atque exclusivum est directionis internae continua alteratio s. mutatio; patetque: lineam curvam non consistere partibus linearibus rectis, utut parvis, esseque ejus quamlibet partem utut parvam etiam curvam, quae non habeat directionem unam constantem, sed potius directionem continuo mutatam. Porro cum lineae cujusvis, ideoque et lineae curvae, limes internus punctum sit, patet: lineam curvam in quovis puncto habere directionem unam definitam et unicam; quae adeo exprimi potest per lineam rectam eam, cujus et ipsius idem punctum limes internus sit, et quae habeat eandem directionem internam unicam. Fieri enim potest, ut linea curva et recta habeant unum idemque punctum commune. Nam spatium sine fine potest definiri et determinari per lineam, ideoque etiam in quovis puncto linea quaevis idealiter adest objective, ideoque realiter cogitari potest adesse subjective. Et ob spatii extensionem absolutam etiam linea recta, quae per quodlibet punctum transit, habere potest quamlibet directionem constantem. Ejusmodi autem linea recta curvae directionem

in definito puncto exprimens s. exponens utrinque est infinita (§. 14), neque habet plus quam unum punctum cum curva continuo commune; quia enim ne minima quidem pars curvae recta est, sequitur eandem ab hac recta utrinque deflectere. Et potest ergo ejusmodi linea recta vocari hujus curvae in hoc definito puncto directrix, quippe quia indicat directionem curvae, quam haec ibi habet; sive etiam linea curvam tangens, quia curvam quidem in uno puncto tangit, neque tamen cum minima ejus parte coalescit. Et cum vox: tangens, jam arctiorem apud Geometras habeat sensum, vocemus ejusmodi lineam, utrinque infinitam curvae tangentialem rectam.

§. 19. Cum omnis linea necessario habeat directionem (§. 14), directio vero sit aut continuo eadem aut continuo diversa, sequitur, omnem lineam simplicis essentiae aut rectam esse aut curvam. Sed nihil impedit, quominus lineae rectae et curvae in eodem puncto jungantur aut arbitrario, aut secundum legem aliquam internam. Neque magis per hoc excluditur, dari lineas, quae simul rectae sint et curvae diversis respectibus *); de quo suo loco agendum est.

§. 20. Curvitas ergo ipsa est directio continuo mutata, ergo etiam partium lineae contiguarum inter se et ad curvam totam continuo varians relatio seu habitudo, s. continuo varians positio. Ergo curvitas est lineae curvae essentielle proprium primum, minime tamen essentielle primum ut lineae; cujuslibet enim lineae essentielle primum longitudo est (§. 16) ad quod deinde ut ejus necessario conjunctum formale accedit interna et externa directio; directio vero in linea recta, quia ibi una et unica est, ad lineae essentiam, nempe longitudinem plane indifferens est; quare lineae rectae longitudo ab ejus forma seu directione plane non dependet.

Sed in linea curva haec longitudinis et directionis relatio aliter se habet. Nam cum lineae curvae directio continuo, h. e. per puncta omnia progrediendo, alia sit, haec ergo variatio directionis ipsa distinctius definienda est; nam directio non potest continuo mutari, nisi id fiat definito modo, s. definita forma. Quare curvitudinis forma simul est forma longitudinis; nam forma formae pertinet cum forma ipsa ad materiam; et cum omnis forma determinet certo modo materiam s. essentiam, cujus est forma: ergo etiam longitudo lineae curvae definito modo determinabitur s. modificabitur per curvitudinis formam.

Porro id, quod in quavis alteratione s. variatione ipsa, qua tali, non mutabile subsistit, ceu ipsius mutationis fundamentum, in omni mutationis statu permanens, lex mutationis vocatur; modus itaque, quo linea curva directionem continuo mutat, apte vocabitur: curvitudinis lex; de qua igitur lineae curvae longitudo etiam dependet. Quamquam vero lex mutationis, qua talis, sit forma non mutata, s. fixa, nihilominus tamen haec ipsa lex iterum variare potest, siquidem ejus constitutio varietatem admittat; nisi forte haec lex mere identica esse statuatur. Et cum spatium infinite divisibile sit, et propterea etiam simplex extensio lineae: sequitur, legem curvitudinis posse sine fine mutari. Sed etiam haec legis ipsius mutatio non sine definita lege fieri potest, quae legis lex deinde iterum mutari potest secundum aliquam legem, et sic porro sine fine. Dantur ergo lineae curvae numero infinitae, quae diversos formant ordines, quorum

*) Sic v. gr. lineae duplicis curvaturae, quae sub eodem angulo assurgunt, ut trochleares s. cochlides cylindricae secundum unam dimensionem rectae sunt, secundum reliquas duas dimensiones vero curvae.

primus erit linearum, quae secundum legem simplicem et mere identicam curvantur, secundus deinde linearum, quarum curvitudinis lex continuo mutatur sed secundum legem simplicem s. identicam, et sic porro in infinitum.

§. 21. Ad lineae rectae et curvae definitiones sequentia adhuc videntur notatu digna. Recta linea non apte definitur ut schema directionis generatim (Schema der Richtung überhaupt); quamquam ea revera sit directionis schema simplicissimum, sub identitatis caractere positum. Aptius dicitur, rectam lineam esse eam, cujus omnes partes omnibus partibus, totique lineae plane sint similes, habeantque omnes ad omnes imo ad totam lineam plane eandem relationem s. positionem; sive etiam: cujus partes inter se et ad totam lineam non sint nisi quantitate diversae. Nam hae lineae rectae proprietates ex ejus absoluta identitate immediate concluduntur.

Definiunt etiam rectam lineam ita, ut sit linea s. via, inter duo puncta brevissima. Neque tamen haec definitio, quamquam de finita recta linea vera sit, loco essentialis definitionis admitti potest. Nam genuina lineae rectae definitio debet totius lineae rectae et omnis naturam explicare; at linea recta tota infinita est, et plane non continetur inter duo puncta utut inter se remotissima. Secundo, conceptus viae et distantiae minime lineae ipsius essentia est, sed tantum essentiae modus, quatenus ea finita est. Tertio conceptus brevitatis maximae est conceptus quantitativus et quidem relativam quantitatem spectans, qui ergo neque rectam infinitam afficit, neque ex linea recta ipsa mensurando dijudicari potest; potius ad hoc requiritur, ut et rectae in se et curvae in se mensurare, imo et rectas atque curvas lineas ad eandem mensuram longitudinis redigere sciatur; id quod eo loco, ubi recta linea definienda est, fieri non potest.

Similiter de alia tritissima lineae rectae definitione judicandum est, secundum quam linea recta ea est, quae, si circum duo quaecunque puncta in ipsa posita vertatur, tota semper in iisdem spatii punctis omnibus maneat, neque convertendo superficiem gignat, quae spatium includat. Vera quidem est et haec definitio, neque tamen primaria. Lineae enim rectae essentia tota et omnis est simplicis extensionis identitas, minime vero ut gyriari possit; neque ergo posita est in eo, quod lineae rectae gyriendo accidit.

Vituperandum quidem non est, ejusmodi definitiones mediatas et partiales exponi atque declarari; nam rem illustrent, et quamvis stricte probari, hoc saltem loco, non possint, tamen eo adigunt mentem, ut definita imaginatione rei schema conformet; sed ut ejusmodi definitiones loco definitionis essentialis, totalis et primariae scientiae systemati ingerantur, id recta scientiae methodus et architectonica ars non patiuntur.

Multi sane sunt, qui autument, in definiendis rebus intuitionem immediatam clarissimis, quae omnis homo, sine ulla praeparatione scientifica, satis intelligat, non adeo multum referre, utrum definitiones essentielles et primitivae habeantur nec ne, cum nemo sanae mentis de his rebus dubitet. Sed haec non est nisi praepudicata sententia. Si e. gr. lineae et rectae et curvae definitiones essentielles, totales et primitivae fuissent notae, haec nostra de lineis theoria hodie nova non foret, quippe cum ea ex his definitionibus deducta sit, quae definitiones ipsae ope metaphysicae speculationis inventae, imo elicitalae sunt ex principiis Geometriae et omni Mathesi generalioribus et elatioribus, imo summis.

Cum linea curva sit simplex extensio ea, in qua longitudinis atque directionis relatio continuo sit alia: inde sequitur, omnes cujusvis lineae curvae partes deinceps positas utut minimas etiam ad proximas sibi utrinque partes habere aliam continuo positionem, ergo etiam continuo aliam positionem versus totam lineam ipsam, versus omnes alias lineas et superficies, imo versus spatium ipsum. Quare linea curva etiam defini potest,

ut extensio simplex ea, cujus omnes partes deinceps contiguae modo diverso toti lineae insint, totamque lineam integrent. Sed haec definitio non nisi secundaria est, quia partium relationes minime vero curvae ipsius totius essentiam respicit, ideoque per definitionem curvae essentialem primariam demonstrari debet.

§. 22. Cum lineae omnis generis omnes sint definite extensae, sive definite longae, quamvis, si curvae sint, directione internâ (§. 18, §. 21) diversae, exoritur hic quaestio de lineis rectis et curvis quoad longitudinem comparandis ita ut referantur rectae ad rectas, curvae ad curvas, rectae ad curvas, curvae ejusdem vel diversi generis ad curvas. — Non defuere quidem philosophi, qui judicarent, rationem longitudinis arcus lineae curvae cujusvis ad lineam rectam ideo inveniri non posse, imo in se nullam adesse, „quia rectum cum curvo nihil habeat commune“. *)

At hic non de curvo, quatenus curvum est, agitur, sed quatenus omnis linea curva, uti omnis linea, longa est; nam lineae duo mementa sunt (§. 16) extensio simplex, s. longitudo, et directio interna; quorum prius lineae efficit materiam (Gehalt) posterius vero formam (Gestalt). Ergo cum longitudo, ut omnium linearum materialis essentia (gehaltliche Wesenheit) qua talis, in omnibus lineis eadem sit, et cum eadem in omnibus lineis continuo sit divisibilis et quantitative determinabilis, sequitur: omnes lineas, quamquam formâ diversas, quod longitudinem comparari et posse et debere; et obtinere omnium omnis generis linearum definitam longitudinis relationem, et quidem, quatenus ea finita sit, rationem etiam quantitativam. Quod etiam probatur modis sequentibus. Cogitentur duae lineae cujuscunque generis, e. gr. recta et curva aliqua, quoad partem intra definita duo puncta contentam, ab et $\alpha\beta$; cum ergo sint plane definitae, definitae etiam sint oportet quoad extensionem, h. e. quoad longitudinem; quae definita lineae utriusque longitudinis determinatio, quia intra definitos limites est, definita erit magnitudo. Cum ergo et ab et $\alpha\beta$ sint in se spectatae definitae magnitudinis absolutae, habebunt etiam definitam magnitudinis inter se habitudinem, h. e. definitam magnitudinis rationem. Sive ita. Cogitentur duae lineae quaevis a punctis a et α continuo crescere: ergo utraque omnes magnitudinis determinationes possibles percurrit; si ergo ambae referantur ad unitatem longitudinis quamlibet, percurreret utraque omnes magnitudinis suae ad hanc unitatem rationes, ergo etiam infinitis modis aequales inter se fieri possunt, imo poterunt cogitari ita crescere, ut maneant semper aequales; et utut magnae sint duae quaevis earundem partes, semper habebunt rationem definitam quantitativam inter se.

Quare omnes omnium generum lineae quoad longitudinem comparari et possunt et debent, cum ad Geometriam pertineat omnium affectionum spatii theoria. Omnis vero rationis longitudinalis linearum diversi generis indagatio nititur eo, ut eae apta constructione inter se conjungantur, per quam illa ratio pateat. Si curvae cujusvis generis comparentur quoad longitudinem cum linea recta, et exprimantur per unitatem linearem

*) Ita Fichte in libro: *Grundlage des Naturrechtes* (1796, I. B., p. 8 prooemii), ubi in specie rationibus speciosis sed erroneis adstruere conatur, absurdum esse, in circuli rectificationem ope polygoni infinite multis lateribus constantis inquirere. Sed neque hoc argumentum rectum est, neque auctor Geometrarum sensum recte percepit de polygono tali loquentium; imo in verbis haeret, quae rei non satis congrua ob brevitatem a Geometris adhibentur. Caeterum omnes rationes, a Fichtio ibi prolatae, hic a me refutantur per ea, quae supra dicta sunt.

rectam, haec curvarum nominari potest rectificatio; et si contra longitudo definita rectae cogitetur lege alicujus curvae curvari, haec dicetur rectae curvificatio; at si tota et universa haec lineas comparandi operatio cogitetur, quae et rectificationem curvarum et curvificationem rectarum, imo etiam curvarum diversi generis mutuum reductionem comprehendat, ea poterit vocari linearum commensuratio.

Section II.

De oppositione directionis quatenus ea in spatio, superficie, linea, et in angulo plano occurrit.

§. 23. Directio est forma materiae (des Gehaltes) spatii h. e. extensionis (§. 4). Jam cum omnis res in se exprimat omnes categorias, uti Metaphysica docet *), verum hoc etiam erit de directione ceu extensionis forma. Ergo etiam antitheseos s. oppositionis categoria in directione locum habet. At secundum antitheseos legem generalem et universalem directio erit opposita directioni, quatenus ambae directiones sunt quidem in se idem, sed in hac identitate alio respectu etiam non idem. Quare directio extensionis in se esse sive habere debet momenta diversa, se invicem, si seorsim cogitentur, excludentia, quae tamen simul sumta nihil aliud sunt, quam directio ipsa tota et integra, quatenus realis est supra omnem oppositionem internam.

§. 24. Jam vero cum extensio spatii sit triplex, superficiei duplex, lineae simplex, patet spatii extensionis directionem esse triplicem, superficiei duplicem, lineae simplicem. Quare etiam directionis interna oppositio in spatio occurrit triplex, in superficie duplex, in linea simplex.

§. 25. Theoria generalis et universalis directionis oppositivae proprie non cadit in Analysin, neque in Geometriam, sed potius in scientiam adhuc incultam, quam tamen inde a trigesimo ante hunc anno sedulo excolui, quae relationis categoriam (die Wesenheit der Selbstheit und Verhaltheit) ita evolvit, uti Analysis totitatis et quantitatis categoriam organice exponit.

Quanti vero momenti haec generalis et pura disciplina de subsistentiae et relationis categoria sit in se, et pro omnibus et singulis disciplinis: et in specie, quantum faciat ad Analysin et Geometriam excolendam: videbunt omnes, quibus verum categoriarum organismum, nexum et ordinem perspicere contigit. **) Quid esset Analysis et Geometria sine relationum et rationum consideratione, sine Logologia?

§. 26. Jam directio interna simplex lineae, et rectae et curvae non nisi simplicem admittit oppositionem internam, cujus quidem momenta s. membra linea ipsa in se est s. continet unita. Sed haec oppositivitatis simplicitas non impedit, quominus eadem directio ad alias linearum et superficierum directiones habeat diversas relationes et

*) Videatur liber meus: Vorlesungen über das System der Philosophie 1828, S. 430 f.

**) Categoriarum organismum primus exposui in libro: Vorlesungen über das System der Wissenschaft, S. 363 ff. Conferatur: Die Grundwahrheiten der Wissenschaft 1829, S. 508 — 516, vergl. S. 195 ff.; und Grundriss der Logik, 1828, 2te Ausgabe.

oppositiones. Linea ipsa est directio sui ipsius unica et tota, supra oppositionem directionis internam, deinde vero etiam in se est directio, quatenus ea in se sibi est opposita, cujus oppositionis membra non sunt nisi duo, in se genere eadem et tantum, quatenus inter se referuntur, opposita; utrumque ergo hujus oppositionis membrum est simul affirmativum s. positivum et negativum s. contrapositivum, hoc est, in ambobus ponitur idem, nempe essentia lineae s. longitudo cum definita directione, sed id modo contrario; ita ut qui modus in altero negetur is in altero affirmetur et viceversa. Quae omnia uti ratione deducta sunt, ita immediatâ rei intuitionem confirmantur. Linea enim quaevis est simul extensa ad hanc plagam, simul vero ad plagam huic directe oppositam, et quidem per omnem ejus essentiam, et inde a quovis suo puncto interno*), id quod indicatur schematicè figurâ 1. Ergo quaevis linea tota et omnis quatenus ad unam saltem plagam dirigitur, vel hanc, vel oppositam; id quod innuitur fig. 2.

Fig. 1.

Fig. 2.

Et cum lineae cuius directio opposita in quovis puncto interno competat (uti modo demonstravimus), sequitur etiam a puncto quovis interno ad plagas oppositas lineam extendi, ita ut ejus longitudo e puncto quolibet huc et illuc dirigatur, id quod figura 3, a. exhibet inde a puncto *m*. Linea recta inde a puncto quolibet interno versus utramque partem est $= \frac{\infty}{2}$; sed tota est $= \infty$ absolute, sive $= \frac{\infty}{2}$ et $\frac{\infty}{2}$, oppositivitatis terminorum ratione non habitâ. (Collato §. 103). Similiter etiam linea recta vel curva inde ab oppositis plagis in unum quodvis punctum *m* convenire cogitari potest; (fig. 3, a).

Fig. 3, a.

Fig. 3, a.

§. 27. Geometrae solent directionis oppositivitatem non nisi in membris oppositis signare et quidem per $+$ plus et $-$ minus; sed id minus recte, cum in oppositivitate directionis qua talis magnitudinis ratio habenda sit nulla, cum haec oppositio non materiam (Gehalt) sed formam, nempe directionem, spectet. **)

§. 28. Cum spatium sit in se continuo determinabile per superficies, lineas et puncta, idque omni directione et ubivis (§. 3); sequitur: per omne punctum quaquaversum dari lineas rectas, et curvas, itemque superficies planas et curvas, quae omnia ad omnia habeant definitam directionem seu positionem externam. Sequitur porro in eadem superficie plana, per ejusdem extensionem identicam duplicem, ubivis dari puncta, lineasque et rectas et curvas, quae inter se habeant directionem externam seu positionem qualemcunque definitam. Itemque sequitur ex continua lineae determinabilitate per puncta: lineam rectam in quovis puncto finiri posse; quin etiam aliam lineam rectam in quovis puncto alia directione cum priore linea recta conjungi (fig. 3, b). Imo si linea recta *abc* finiatur in *b*, inde totum infinitum spatium constructioni patet, potestque inde a puncto *b* alia linea recta quaquaversum in spatio duci (fig. 4) uti *bc*, *bd*, *be*, . . . ,

Fig. 3, b.

Fig. 4.

*) Nam inde a puncto initiali aut finali hypostatico linea non nisi ad unam plagam extenditur

**) Nisi directio interna et externa re ipsa et signis confusae fuissent, neque Carnotii neque Bussii dilucidationibus hujus rei opus fuisset. Carnotii quidem substitutio quantum directarum et indirectarum loco positivarum et negativarum non apta videtur, cum quantitates negativae non sint indirectae sed potius contradirectae, et cum utraque magnitudines, positivae et negativae, sint directae, simulque opposito respectu contradirectae. (Vid. Géométrie de Position, par Carnot, à Paris 1803). Genuinam hujus rei theoriam exposui in libro: System der Arithmetik etc. Jen. 1803.

et si eligatur directio lineae bq , inde a puncto ejusdem arbitrario q iterum patet totum spatium, et sic sine fine; quod si una ex infinitis his directionibus in puncto q obviis eligatur linea ql , ea poterit vel esse cum lineis ab et bq in eodem plano, vel minus. — Lineae ergo rectae aut sunt in eodem plano, aut in planis diversis. Utut vero lineae rectae spatio insint, definitam quaevis ad quamvis habet directionem externam, quae simul determinatur per cujusvis lineae directionem internam.

Fig. 5, α .

§. 29. Si igitur cogitentur duae lineae rectae in spatio, ab , cd (fig. 5, α), eadem habent definitam directionis oppositivitatem externam, quam intuemur, si intueamur directionem utriusque internam, atque relationem ambarum in spatio, quam inter se habent. Ut linearum directiones internae discernantur, observemus ordinem literarum; prior nempe linea aut dirigitur a puncto a ad punctum b , aut a puncto b ad a ; posterior vero linea aut a puncto c ad punctum d , aut viceversa; quare habemus lineas directione oppositas ab et ba , cd et dc . Unde oriuntur quatuor relationis externae harum linearum aspectus, nempe ab ad cd , ab ad dc , ba ad cd , ba ad dc . Fi-

Fig. 5, β .

Fig. 5, γ .

Fig. 5, δ .

gura 5, β , lineae ab et cd congruunt, nihilominus tamen hi quatuor casus idealiter distinguere debent; figura 5, γ lineae ab et cd non sunt in eodem plano, ergo totae extra se positae, attamen illi quatuor aspectus relationis earundem et nunc recurrunt; figura 5, δ utraque sunt in eodem plano, ubi se secant, h. e. habent unum punctum m commune, et quatuor illi casus clarissime aspiciuntur ut relationes am ad cm , am ad dm , bm ad cm , bm ad dm .

§. 30. Linearum relatio externa seu positio vocatur angulus linearis, qui ergo est aut rectarum, aut curvarum, aut rectarum et curvarum inter se; et cum linearum relatio externa quoad oppositionem directionis dependeat ab oppositione linearum internâ, angulus poterit etiam definiri: linearum externa oppositio in spatio. Si igitur cogitentur lineae rectae in eodem plano, earundem anguli vocabuntur anguli lineares plani; quorum pro quibusvis duabus rectis necessario aderunt simul quatuor ab ad cd , ab ad dc , ba ad cd , ba ad dc ; semperque recordandum est, angulum pertinere ad lineas has rectas infinitas, quamvis quarumlibet duarum rectarum angulus vel per minimas earundem partes definitus sit, ob lineae rectae identitatem perpetuam (§. 13), et quamvis angulus maxime conspicuus seu visibilis sit linearum rectarum se intersecantium in puncto m sectionis, uti fig. 5, δ anguli μ , ν , ρ , σ . Brevitatis causa angulus linearis signetur per $\angle$, apposis linearum, a quibus formatur directionibus, uti in dicta figura adsunt $\angle am$ ad cm , $\angle am$ ad dm , $\angle bm$ ad cm et $\angle bm$ ad dm , sive $\angle \mu$, $\angle \nu$, $\angle \rho$, $\angle \sigma$; sive $\angle amc$, $\angle amd$, $\angle bmc$, $\angle bmd$.

§. 31. Duae rectae in eodem: plano constitutae congruentes aut nullam oppositionem habent, uti fig. 5, β , lineae ab et cd , aut sibi omnino oppositae sunt, s. contradictorie oppositae, uti fig. 5, β ab et dc . Sin vero non congruant sed habeant tamen punctum aliquod commune, earundem oppositio neque nulla est, neque totalis, sed in medio horum extremorum collocata, uti fig. 5, δ .

§. 32. Continuitas spatii, superficiei et lineae docet, angulum linearem planum esse quantitatem continuam; cujus valor est $= 0$ si lineae rectae ab et cd congruant, et cujus unitas hypostatica s. objectiva est oppositio totalis, ut linearum congruentium ab et dc . Jam vero cum oppositio rectarum etiam major esse possit quam contradictoria oppositio, uti fig. 5, δ angulus am ad dm , aptum videtur oppositionem contradirectam seu totalem assumere pro unitate oppositionis seu anguli; unde anguli

Fig. 5, δ . amd et cma (fig. 5, δ) fiunt majores quam haec unitas. Unitatem angularem

signemus in sequentibus per $\bar{1}$, unitatem longitudinarem vero per $\bar{1}$, sed unitatem absolutam universalem et generalem per 1.

§. 33. Si duae rectae in plano se secant (fig. 5, δ), poterit linea altera alteram secare aut aequabiliter utrinque aut inaequabiliter, hoc est aut ita, ut cd opponatur lineae ab eodem modo uti lineae ba (fig. 5, ϵ) ut $\angle \alpha$ sit $= \angle \beta$, aut ita ut cd aliter opponatur lineae ab , aliter vero lineae ba (uti fig. 5, δ) ut e. gr. $\angle \mu$ sit minor angulo ν . Anguli ad eandem rectam deinceps aequales vocantur recti, inaequales obliqui; obliquus recto minor vocatur acutus, major obtusus; angulus vero major oppositione totali, seu major duobus rectis vocatur angulus intrans; angulus aequalis toti oppositioni seu duobus rectis, aut rectis numero pari, nominatur latens. Angulum rectum designemus per $\angle R$ s. R . simpliciter.

Fig. 5, ϵ .

§. 34. Ex spatii continuitate cognovimus quoque, ex lineae rectae quovis puncto ejusdem directionem posse quaquaversum in spatio deflectere (fig. 3, b et fig. 4), idque deinceps quotlibet vicibus; idque adeo fieri poterit in eodem plano, uti (fig. 6) e directione lineae ab in directionem linearum cd , ef , gh , ik , ... Et cum lineae ab , cd , ef , gh , ik sibi sint definitis angulis oppositae, describendo figuram $amm'm''m'''$ deflectetur a prima directione ab , deinceps angulis $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$, et nominabuntur anguli α , β , γ , δ ... anguli flexus. Simulque patet, angulum ab ad $fe = \epsilon$ esse $= \angle \alpha + \angle \beta$, angulum ab ad $hg = \varphi$ esse $= \angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma$; angulum ab ad $ki = \eta$ esse $= \angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma + \angle \delta$; quia lineae rectae am , mm' , $m'm''$, $m''m'''$... directionem eandem suam quaevis retinet. *)

Fig. 6.

§. 35. Hinc patet alter oppositionem linearum externam, s. angulum considerandi modus, medius quidem, sed aequae realis et hypostaticus, quo nempe angulus apparet ut deflexionis determinatio, sive determinatus modus, e directione s. via deflectendi; et nominabitur ergo, uti modo dictum est, quivis angulus, quatenus ita consideratur, angulus flexus s. flexionis, qui igitur idem est ac angulus positionis earundem linearum; uti fig. 6 angulus flexus α est $=$ angulo positionis linearum ab et cd , sive linearum ab et dc .

§. 36. Si sumatur in plano definita recta ab , ea poterit sine fine continuari versus b , et versus a directione ba . Sed poterit etiam in quovis puncto m e directione ab angulo plano quolibet deflecti in directionem alius rectae; idque modo opposito, aut ad hanc aut ad oppositam lineae ab plagam, sive aut ad dextram aut ad sinistram partem in eodem plano ad lineam principalem ab . Uti (fig. 7 a) ad dextram angulis α , β , γ ..., ad sinistram vero angulis iisdem, vel aliis α' , β' , γ' . Hinc elucet angulo-

Fig. 7, a.

*) Haec constructio fundamentum est genuinae omnium polygonorum rectilineorum, seu polygonismorum theoriae a me anno 1798 inventae, quam postea magno volumine elaboravi, neque tamen adhuc publici juris facere potui. Eandem Jenae annis 1801—1804 publice ad dictata docui; hoc vero ejusdem fundamentum tradidi in dissertatione: de philos. et matheseos notione etc. Jenae 1802, indeque demonstrationem genuinam summae trianguli angulorum interiorum primus erui (videatur hic §o. 42 sub finem), quam deinde in Geometriae elementa recepere Fischer, Thibaut, et forsitan alii. In genuina mea polygonismorum rectilineorum tractatione etiam de asterismis agitur, de Pentalphate, heptalphatis, octalphatis, $(2n)$ — alphatis, et $(2n \pm 1)$ — alphatis; de quibus etiam alio tempore et loco publice disserui.

rum flexus oppositio relativa, quam eandem signis $+$ et $-$ signare debebimus. Erunt ergo anguli $\alpha, \beta, \gamma \dots$ positivi, anguli vero $\alpha', \beta', \gamma' \dots$ negativi; aut anguli α', β', γ' , positivi, et anguli α, β, γ , negativi. Figura ergo $Jm m' m'' m''' \dots$ construatur angulis flexus $+\alpha, +\beta, +\gamma$, at figura $Jm \mu' \mu'' \mu''' \dots$ angulis flexus $-\alpha, -\beta, -\gamma \dots$

§. 37. Spatii et superficiei continuas porro docet, angulos flexus et positivos et negativos utrinque sine fine assumi posse, itaque construere figuras rectilineas angulares, s. polygonismos infinite multos et infinite varios, pro angulorum flexus lege, ordine et magnitudine. Quod si ergo, denotante litera z numerum quemvis integrum, summa angulorum flexus positivorum vel negativorum vel mixtorum fuerit $= \pm 4z \cdot R$ (§. 33 ss.), redibit constructio in directionem, a qua exiit; nam si summa angulorum flexus sit $= \pm 2R =$ oppositioni totali, erunt latera correspondentia sibi e regione opposita; ergo si fuerint $= 4R$ erunt sibi opposite opposita e regione, ergo plane non opposita, ergo directione eadem; sive aliis verbis: consummata erit una tota conversio seu gyratio (eine ganze Wendung); quo facto ulterius etiam versus eandem plagam constructio converti potest, ita ut summa angulorum flexus sit deinceps $= 4 \cdot 2R, 4 \cdot 3R, \dots, 4 \cdot zR$, denotante z numerum quemvis integrum; ergo potest summa angulorum flexus esse aequalis tot totis conversionibus, quot libuerit, idque per angulos flexus cujusvis aptae magnitudinis, utut parvos vel magnos, ergo et quantumlibet multos. —

§. 38. Angulus igitur et considerari et potest et debet ut angulus conversionis s. angulus gyratorius (als Drehwinkel, Wendewinkel); et praebet hoc respectu angulus unius conversionis, s. gyri seu gyrationis (Einer ganzen Wendung) mensuram hypostaticam seu unitatem hypostaticam pro mensurandis omnibus angulis. Quae unitas i deinde dividi solet in 360 subpartes, quae vocantur gradus, quilibet deinde gradus in 60 partes minutas, quaelibet pars minuta prima in 60 partes minutas secundas, et sic porro. Unde R fit $= 90^\circ$, angulus latens $= 180^\circ$, angulus gyratorius $= 360^\circ = 2 \cdot 360^\circ \dots = z \cdot 360^\circ$; fit $= 0$, si is consideretur ut angulus oppositionis.

Fig. 7, b.

§. 39. Cum quaevis recta linea habeat directionis oppositionem internam, ergo construere possit aut antrorsum aut retrorsum, sequitur, constructionem polygonalem per angulos flexus aut positivos aut negativos, etiam quoad longitudinem dupliciter institui posse, nempe aut antrorsum aut retrorsum, sive: longitudine aut positiva aut negativa, uti hoc exhibet (fig. 7, b), ubi inde a puncto initiali J longitudo aut assumitur positiva per $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ aut negativa per $a, b, c, d \dots$. Haec longitudinis oppositivitas illustratur eo, quod facie continuo versus eandem plagam conversa possis aut antrorsum progredi aut, dorsum secutus, retrorsum regredi, passu quasi cancrino. — Quin etiam anguli flexus esse possunt cujusvis magnitudinis, acuti, recti, obtusi, latentes $= 180^\circ$, majores quam 180° sed minores quam 360° (quales anguli intrantes (des angles rentrants), eingehende Winkel) vocari solent, uti (fig. 7 c) anguli flexus γ et ϕ hexagoni $abcdef$, imo $= 360^\circ$, et $z \cdot 360^\circ$, denotante z numerum quemlibet integrum. Quare forma generalis anguli flexus est $\alpha = z \cdot 360^\circ \mp (\beta < 360^\circ)$; sive: $z \cdot 180^\circ \mp (\beta < 180^\circ)$.

§. 40. Exeamus igitur construendo inde a quolibet puncto initiali J (fig. 7, b.) secundum directionem definitam simplicem ab , aut ba , quae ergo erit constructionis directio fundamentalis seu initialis, nempe aut RR' aut $R'R$ arbitraria. Jam si longitudines sumptae directione $ab = RR'$ vocentur positivae, erunt ergo longitudines

sumptae directione oppositâ $ba = R'R$ negativae vocandae; quae merae longitudinis oppositio si gradiendo illustrari debeat, et si longitudo $ab = RR'$ percurratur facie versus α , α' conversâ progrediendo, debet longitudo $ba = R'R$ percurri, facie non conversâ, sed continuo versus α , α' directâ, sed retrorsum, passu quasi cancrino. Si nunc, fig. 7, b, sumantur longitudines positivae, anguli flexûs poterunt esse aut ad dexteram positivi $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$ + ... aut ad sinistram negativi $-\alpha'$, $-\beta'$, $-\gamma'$ - Similiter, si longitudines describantur negativae, anguli flexûs poterunt esse anguli flexûs aut positivi, uti $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, + ... aut negativi, uti $-\alpha'$, $-\beta'$, $-\gamma'$, - ..

Vix opus est notasse, aequè bene posse directionem $R'R$ vocari positivam, ideoque longitudines ab J versus α , α' positivas, atque directionem RR' negativam, ideoque longitudines ab J versus α , α' negativas; pariterque angulos flexûs α' , β' , γ' , ... positivos, atque angulos flexûs α , β , γ , ... et α , β , γ , ... negativos; uti id ex membrorum oppositivitatis indifferentia sequitur. (§. 27 ss.)

Brevitatis gratia designentur longitudines linearum per l , λ , l , L , $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$, ... anguli autem per w , v , w , W , Y , $\mathfrak{B}$, ... Unde datur modus notandi modos quatuor simplices constructionis polygonialis s. polygonismaticae, qui sequuntur:

$$\begin{array}{ll} +l \text{ cum } +w \text{ (fig. 8, a)} & -l \text{ cum } +w \text{ (fig. 8, c)} \\ +l \text{ cum } -w \text{ (fig. 8, b)} & -l \text{ cum } -w \text{ (fig. 8, d)} \end{array}$$

Fig. 8, a, b, c, d.

Haec res optime illustratur, si homo hos casus exequatur gradiendo: progredietur ergo casu a facie antrorsum conversâ, deflectendo ad dexteram; casu b progredietur facie antrorsum prospiciente, sed deflectendo versus sinistram; casu c regredietur facie item antrorsum conversâ passu quasi cancrino, deflectendo versus dexteram; casu d denique item regredietur passu cancrino, sed deflectendo versus sinistram. —

§. 41. Si unus horum quatuor casuum inter constructionem mutetur in eorundem alium, et sumantur omnes anguli flexûs minores angulo recto: inde oriuntur casus mutationis duodecim, qui exhibentur figuris 9, a , b , ... m , in quibus omnibus mutatio fit in puncto p , et constructio exit a puncto initii J . Qui duodecim casus repraesentant tria symptomata principalia characteristic, in formandis polygonismis rectilineis occurrentia, nempe flexurae in partem contrariam, fig. 9, a , d , g , k ; reversionis, s. rostri acuti, fig. 9, b , e , h , l ; et rostri adunci, fig. 9, c , f , i , m . Fig. 9, a, b, ... m

§. 42. Si in polygonismo rectilineari sint latera quotlibet, et cujusvis magnitudinis, aut positivae aut negativae longitudinis, et si anguli ejusdem polygonismi flexûs, aut positivi aut negativi, omnes in summam redacti $= z \cdot 360^\circ$ (§. 37): fieri potest, ut polygonismi latus ultimum finiat in punctum aliquod lateris initialis. Nam si summa angulorum flexûs omnium sit $= 360^\circ$, ex directione ultimi lateris redibitur in directionem cum directione fundamentali, quae est eadem primi lateris, parallelam, ergo directio lateris ultimi erit a directione fundamentali RR' diversa definito angulo μ ; qui ergo erit aut 180° , aut $180^\circ + \nu$; si fuerit prius, latus ultimum in lineae initialis punctum aliquod finire non potest, quia tum esset aut parallelum aut cum illa penitus congrueret; si autem posterius, linea initialis a latere ultimo necessario secabitur, modo satis prolongetur, id quod ob lineae rectae infinitatem fieri potest. Ergo fieri potest, ut polygonismus rectilineus in se recurat, sive claudatur. Similiter vero idem probatur, pro summâ angulorum flexûs omnium $z \cdot 360^\circ$.

In omni polygonismo in se redeunte s. clauso summa omnium angulorum externorum aut positivorum aut negativorum est $= z \cdot 360^\circ$, quaecunque sit laterum magnitudo et ratio inter se. Nam per omnium laterum angulos flexûs polygonismus

redit in directionem primi lateris, id quod non fieri potest, nisi summa angulorum flexus sit aut 360° , aut $2 \cdot 360^\circ$, aut $3 \cdot 360^\circ$, generatim $z \cdot 360^\circ$.

Summa vero omnium angulorum interiorum polygoni clausi n lateribus circumdati est $= (n - 2z) 180^\circ$.

Nam summa omnium angulorum et interiorum et exteriorum est aequalis tot angulis 180° , quot latera adsunt, ergo $= n \cdot 180^\circ$; unde detracta summa angulorum exteriorum, quae est $= 2z \cdot 180^\circ = z \cdot 360^\circ$, remanet pro angulis internis summa $(n - 2z) 180^\circ$. Siquidem anguli flexus negativi, atque anguli interni intrantes (§. 33) nulli adfuerint, uti fig. 10, a: enunciati veritas immediate patet. Sin autem anguli flexus negativi adfuerint, uti fig. 10, b anguli f et h , ideoque et anguli intrantes, nempe angulus $f + x = f + 180^\circ$, et $h + y = h + 180^\circ$, deerunt quidem pro summa omnium angulorum tot vicibus 180° , quot anguli intrantes adsunt, sed totidem 180° etiam ad summam angulorum interiorum accedunt, uti in figura $y = 180^\circ$, et $x = 180^\circ$; anguli vero flexus negativi in summa exteriorum angulorum negative occurrunt, in summa vero interiorum positive, quare perinde est, pro summa interiorum angulorum, utrum anguli flexus negativi occurrant, nec ne. Hoc illustrabit computus pro fig. 10, b institutus, nempe enneagoni $abcdefghi$.

Fig. 10, b.

Fig. 10, b.

$$1) a + b + c + d + e + g + i = 2 \cdot 180^\circ + f + h.$$

$$2) a + b + c + d + e + g + i + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \phi + \eta = 7 \cdot 180^\circ.$$

$$(2) - (1) = (2) - (a + b + c + d + e + g + i) = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \phi + \eta = 5 \cdot 180^\circ - f - h.$$

Quibus angulis, si addatur $f + x + h + y = 2 \cdot 180^\circ + f + h$, habebitur summa angulorum interiorum, quae ergo est $(5 + 2) 180^\circ = 7 \cdot 180^\circ = (n - 2z) 180^\circ = (n - 2) 180^\circ$, cum in hoc exemplo z sit $= 1$. —

Si igitur $z = 1$, summa angulorum interiorum trianguli cujusvis erit $= 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, quadranguli $= 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$, pentagoni $= 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$, n -goni $= (n - 2) 180^\circ$. —

§. 43. Si in aliquo polygonismo rectilineari n laterum omnia latera sint aequaliter longa atque eadem opposititate, hoc est aut omnes positivâ aut omnes negativâ longitudine, et si omnium angulorum flexus inter se aequalium summa sit $= 360^\circ$ aut $2 \cdot 360^\circ$, aut $3 \cdot 360^\circ$ aut $z \cdot 360^\circ$; latus ultimum, nempe n — tum revertetur angulo flexus omnibus reliquis aequali in punctum initiale lateris primi. Et vocabitur ejusmodi polygonismus regularis seu polygonum regulare, atque si angulorum flexus summa sit $2 \cdot 360^\circ$ aut $3 \cdot 360^\circ$, aut generaliter $(1 + z) \cdot 360^\circ$, vocabitur n — alpha s. asterismus n — gonius, uti pentalpha, heptalpha, octalpha, et quae sequuntur.

Fig. 11, a.

Quod ut demonstretur generaliter, cogitetur generaliter polygonum regulare n — laterum. Jam cum summa omnium n angulorum flexus ejus sit $= z \cdot 360^\circ$, erit quivis eorum $\frac{z}{n} \cdot 360^\circ$. Incipiendo ergo inde a puncto J , factis lateribus ab, bc, cd , aequaliter longis, et factis aequalibus angulis $\beta, \gamma, \delta, \dots = \frac{z}{n} \cdot 360^\circ$, habebitur n — gonii regularis initium. Jam cum summa omnium ejusdem angulorum interiorum $abc, bcd, cde, \dots$ sit $= (n - 2z) 180^\circ = \left(\frac{n}{2} - z\right) 360^\circ$ (§. 42), et cum ejusmodi anguli interni numero n adsint, erit quivis eorum $\frac{1}{n} (n - 2z) \cdot 180^\circ = 180^\circ - \beta$. Agan-

tur nunc ex punctis finalibus laterum omnium $b, c, d, \dots$ lineae radiales $br', cr'', dr''', \dots$ ita ut per eas anguli interni $abc, bcd, cde, \dots$ bisecentur; erunt ergo omnes anguli interni dimidii $= \lambda$ inter re aequales $= \frac{1}{2n} (n - 2z) \cdot 180^\circ = \frac{1}{2} (180^\circ - \beta)$;

ergo nunquam inter se parallelae proinde lineae radiales br' et cr'' , satis prolongatae, se intersecabunt versus eandem partem, ad quam anguli λ siti sunt, puncto definito m , et erit $\triangle bcm$ in b et c aequicrurum, ergo $bm = cm$. Lineae deinde cr'' et dr''' eodem modo se intersecabunt, ita ut apotoma lineae cr'' et apotoma lineae dr''' sint inter se aequales, atque $\triangle cr''r'''d$ sit aequale triangulo bcm , et apotoma lineae $cr'' = cm$; quare linea radialis dr''' in eodem puncto m secat radialem br' . Idem vero de omnibus lineis radialibus sequentium $n - goni$ laterum eodem modo demonstratur, quae ergo omnes conveniunt in eodem puncto m ; triangulaque $bmc, cmd, \dots$ omnia inter se sunt aequalia, itemque anguli omnes circum punctum m , nempe anguli μ , inter se aequales. Jam vero cum summa angulorum internorum cujusvis trianguli sit $= 180^\circ$ (§. 42), nempe $2\lambda + \mu = 180^\circ$, at etiam anguli deinceps positi $abc + \beta = 180^\circ$, hoc est $2\lambda + \beta = 180^\circ$, erit $\angle \mu = \angle \beta = \frac{z}{n} \cdot 360^\circ$. Ducatur nunc

quoque linea am , unde oritur angulus amb ; cum $\angle abm = \lambda = \angle bcm$, et cum ex hypothesi latus $ab =$ lateri bc , et latus bm trianguli abm sit quoque $=$ lateri cm trianguli bcm , erit $\triangle abm = \triangle bcm$, ergo $\angle amb = \angle bmc = \angle \mu$, et linea $am = bm$, angulusque $bam = cbm = \lambda$. Si nunc cogitetur $n - gonum$ constructum esse usque ad latus penultimum, quod est $(n - 1) - tum$, quod vocetur pq , et cogitentur ejusdem lateris lineae radiales pm, qm , erit $\triangle pmq$ omnibus reliquis triangulis $amb, bmc \dots$ aequale, ergo $qm = bm = am$. Jungantur puncta q et a lineâ qa , unde orietur triangulum qma ; quod cum $qm = am$, in q et a aequicrurum est. Jam vero cum summa angulorum omnium μ circum punctum m , incluso angulo pmq sit $= (n - 1)\mu = (n - 1) \frac{z}{n} \cdot 360^\circ$, et summa omnium μ , angulo qma incluso sit $= n \cdot \mu = n \cdot \beta = z \cdot 360^\circ$, erit angulus $qma = z \cdot 360^\circ - \frac{n-1}{n} z \cdot 360^\circ = \frac{n-(n-1)}{n} z \cdot 360^\circ = \frac{z}{n} \cdot 360^\circ = \mu$. Proinde $\triangle qma = \triangle pmq = \triangle amb$; ergo latus $qa = ab$. Ergo figura constructa est $n - gonum$ regulare. Quia autem z et n omnes numeros integros complectuntur, patet $n - goni$ regularis generalis possibilitas.

Haec demonstratio generalis, quae simul polygona regularia, quorum angulus internus obtusus est, atque omnia $n - alphata$ complectitur, illustratur figuris 11, a. et 11, b. Figura quidem 11, a. est schema decagoni regularis obtususanguli, in quo angulus flexûs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ est $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, internus $\angle abc, \angle bcd, \dots = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$, proinde $\angle \lambda = 72^\circ, \angle \mu = 36^\circ$. Figura vero 11, b. exhibet asterismum decagonalem $abcdefghik$, seu $dacalpa$, cujus angulus flexûs est $= \frac{3 \cdot 360}{10} = \frac{1080}{10} = 108^\circ$, ergo internus $abc, bcd, \dots = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, proinde $\lambda = 36^\circ, \mu = 108^\circ$. *)

Fig. 11, a.

Fig. 11, b.

*) Polygona regularia, quae vulgo discuti solent, habent omnium angulorum flexûs summam $= 1 \cdot 360^\circ = \angle n\alpha$. Sed dantur infinite multa polygona regularia quorum angulus flexûs α , est pars aliquota numeri $2 \cdot 360^\circ$, item infinite multa, quorum α est

Pro figuris rectilineis regularibus simplicissimis dantur demonstrationes simpliciore.

Fig. 11, c. Nam si quaeratur triangulum regulare, erit angulus flexus $\alpha = 120^\circ$ (fig. 11, c) et $\angle abc = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Facto ergo secundo latere $bc = ab$, et $\angle abc = 60^\circ$, ducatur ac ; ergo ob $ab = bc$ erit $\triangle abc$ in b aequicrurum, ergo $\angle g = \angle b$; sed $g + b = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ergo $b = 60^\circ$ et $g = 60^\circ$, quare anguli omnes interni aequales, proinde etiam $\angle a = \angle g$, ergo latus $bc = ac = ab$. Ergo triangulum regulare possibile est.

Fig. 12. Pro quadrato regulari, fig. 12, β est $= 90^\circ$, proinde etiam $b = 90^\circ$; facto $bc = ab$, et $\angle \gamma = \angle \beta = 90^\circ$, erit item $b = 90^\circ$ et $c = 90^\circ$. Junctis punctis a et d , quia $b = 90^\circ$ et $c = 90^\circ$, ergo $ab \parallel cd$; erit quoque $ad \parallel bc$, et $\angle a + \angle d = 180^\circ$ atque $a = d$, ergo $a = 90^\circ$, $d = 90^\circ$. Ergo haec figura regularis est.

§. 44. Linea curva est extensio simplex, s. longitudo directionem internam continuo mutans (§. 18, ss.) et habet in quovis suo puncto unam directionem definitam, quae exprimitur lineâ rectâ tangentiali (§. 18). Haec directionis in curva continua mutatio apparet esse continua flexio, ita ut quaevis curva sit longitudo extensa per continuam flexuram (§. 35). Quod si ergo quaevis curvae pars vocetur arcus, et sumatur alicujus curvae definitus arcus ab , directio quam habet curva in puncto hujus arcus finali b , exponetur hujus puncti tangentiali rectâ pb , (fig. 13, a). Directio ergo externa, quâ sibi tangenciales RR' et pb opponuntur, hoc est angulus $RR' \dots pb$ (§. 31) quem faciunt dictae tangenciales inter se, exponit quantitatem mutationis directionis curvae, quam percurrit sive effecit progrediendo a puncto a ad punctum b , sive: angulus flexus α est $=$ angulo interno arcus ab . Quodsi per puncta a et b (fig. 13, a) ducantur rectae pm et qm perpendiculares seu normiales ad curvam, haec se intersecabunt ad partem curvae concavam, et quidem sub eodem angulo flexus arcus ab , nempe sub angulo $pmq = \alpha$, quia ex curvaturae continuitate (§. 21) sequitur, oppositionem externam harum normalium definiri per magnitudinem flexurae arcus ab pariter ac angulus tangentialium, ad quas normiales eundem quaevis habet angulum $= 90^\circ$. Quod etiam mediate ita probatur (fig. 13, a): quadrangulum $arbm$ habet angulorum internorum summam $4R$; ang. $ram +$ ang. $rbm = 2R$ (ex constructione); ergo $\angle \beta + \angle amb$ etiam $2R$; sed, $\angle \beta + \angle \alpha$, deinceps positi $= 2R$, ergo $\angle amb = \alpha$.

Quam magnus angulus arcus curvae internus fieri possit, hoc ex curvae lege (§. 21) determinatur; potest esse acutus (fig. 13, a); rectus (b); obtusus (c); latens (d), nempe angulus $RR' \dots cb = 2R$ ita ut RR' et cb parallelae sint, major quam 180° (e) (vid §. 34); $o = 360^\circ$ (f); $o = 2 \cdot 360^\circ$ (g); ... $o = 3 \cdot 360^\circ$ (h); ... $o = z \cdot 360^\circ$ (§. 37).

pars aliquota numeri $3 \cdot 360^\circ$, et generaliter infinite multa, quorum α est pars aliquota numeri $z \cdot 360^\circ$ denotante z omnes numeros integros: 1, 2, 3, ... Forsitan non deerunt, qui generalem polygonismorum rectilineorum theoriam ideo parvi habeant, quia ejusdem utilitatem nullam cognoscant. At utilitas hujus theoriae eo major elucebit, quanto perfectius eadem exculta erit. Ad illustrandam quidem linearum curvarum theoriam praesertim originariam, a me inventam, theoria polygonismorum rectilineorum generalis multa valet, uti hoc vel haec mea specimina ostendunt. — Tantum vero abest ut theoria polygonorum regularium theoriâ circuli egeat, ut potius hanc anteire, eamque praeparare secundum rectam methodum debeat.

§. 45. In curvae cursu occurrere possunt omnes illi quatuor casus, quos no. 41 enumeravimus, omnesque adeo affectiones, quae per horum casuum mutationes in polygonismis rectis occurrunt. Ex. gr. in figura 14 inde a puncto initiali J arcus ab extenditur positiva longitudine et angulo interno flexûs positivo; arcus ab , negativa longitudine et negativo angulo; arcus ab' positiva longitudine et negativo angulo, arcus ab' , negativa longitudine et positivo angulo. Casus vero omnes mutationis horum quatuor casuum exhibentur figuris 15, 16, 17. Et quidem Fig. 15 arcus apb incipiens cum $+l$ et $+w$ inde a puncto p , servatâ longitudine positivâ transit in $-w$; totus igitur hic arcus formatur antrorsum (vid. §. 40) eundo, usque ad p dextrorsum deflectendo, sed inde a p sinistrorsum deflectendo; quare prior hujus arcûs pars ap posita est cis tangentialem puncti p , posterior vero pars pb trans eandem. Arcus vero ap,b , incipiens cum $-l$ et $-w$ inde a puncto p , servatâ longitudine negativâ transit in $+w$; totus igitur hic arcus formatur retrorsum passu cancrino (§. 40), usque ad punctum p , sinistrorsum devolvendo, sed inde a puncto p , dextrorsum devolvendo, quare prior hujus arcus pars ap , posita est cis tangentialem puncti p , posterior vero p,b , trans eandem tangentialem. Arcus autem $ap'b'$, exordiens cum $+l$ et $-w$ inde a puncto p' , retentâ longitudine positivâ $-w$ mutat in $+w$; totus igitur hic arcus formatur antrorsum eundo, usque ad p' deflectendo ad sinistram, inde a p' vero ad dextram, ita ut pars anterior ap' sit cis tangentialem puncti p' , posterior vero pars $p'b'$ trans eandem. Arcus denique $ap'b'$ incipit cum $-l$ et $+w$ et inde a puncto p' transit in $-w$; totus ergo arcus $ap'b'$ formatur passu retrogrado s. cancrino, usque ad punctum p' devolvendo ad dextram, sed inde a p' ad sinistram; unde prior pars arcûs ap' est cis tangentialem puncti p' , posterior vero $p'b'$ trans eandem. Quia igitur his quatuor mutationibus curvae flexura in contrarium mutatur, ita ut arcûs concavitas transeat in convexitatem et vice-versa, ejusmodi puncta, in quibus haec mutatio infit, vocantur puncta flexûs s. flexurae simpliciter, sive rectius puncta flexûs contrarii (ein Umbiegepunkt).

Fig. 14.

Fig. 15, 16, 17.

§. 46. Uti vero (45) in curvis flexio in contrariam oppositivitatem transire potest, ita idem fieri potest respectu longitudinis, cujus transitus casus quatuor exhibentur figura 16; ubi arcus apb incipit cum $+l$ et $+w$, sed inde a puncto p transit in $-l$, servato $+w$; totus igitur hic arcus apb formatur deflectendo versus dexteram, sed eundo usque ad punctum p positiva longitudine, inde a puncto p vero negativa longitudine; flexio positiva in fine longitudinis positivae habet directionem tangentialis cpd puncti p , a qua deinde etiam sed passu cancrino versus dexteram ulterius desciscit; unde fit, ut pars prior ap sit cis tangentialem cpd , posterior vero pb trans eandem. Arcus autem ap,b , incipit in puncto a cum $-l$ et $-w$, sed in puncto p , mutat $-l$ in $+l$, flexurâ negativâ servatâ; totus itaque hic arcus ap,b , formatur flectendo ad sinistram sed ab a usque ad p , passu retrogrado, a puncto p , autem passu antrorsum directo; in fine longitudinis negativae arcus habet directionem tangentialis c,p,d , a qua deinceps amplius deflectitur versus sinistram sed passu progressivo; quare prior hujus arcûs pars est citra dictam tangentialem, posterior vero trans eandem. Arcus porro $ap'b'$ ad alteram directionis RR' initialis partem iterum totus construitur negativa deflexione, sed usque ad punctum p' positivâ, inde a p' vero negativâ longitudine, ita ut pars ejus ap' sit cis tangentialem $c'p'd'$, altera vero $p'b'$ trans eandem. Arcus denique $ap'b'$ inchoans cum $-l$ et $+w$, formatur quidem totus flectendo versus dexteram, sed prior pars ap' negativa longitudine passu cancrino, posterior pars $p'b'$ passu antrorsum directo; quare prior pars ap' est cis tangentialem $c'p'd'$, altera vero $p'b'$ trans eandem. Jam quia his

Fig. 16.

quatuor casibus curva, quatenus longa est, in contrariam abit oppositivitatem, hoc est, quia revertitur, punctum in quo hoc fit uti p, p_1, p', p' nominatur punctum reversionis (ein Umkehrpunkt) seu punctum rostri, seu apex rostri, quia arcus ad ejusmodi punctum confines ob formae similitudinem rostrum et quidem rostrum acutum (Spitzschnabel) s. cuspis acuta vocantur, quia duae curvae partes ad tangentialem puncti reversionis sibi partem convexam obvertunt.

Fig. 17.

§. 47. Sed fieri etiam potest ut arcus curvae et longitudinis et anguli flexus oppositivitatem in contrariam convertat; cujus rei quatuor casus offeruntur figurâ 17. Arcus nimirum apb formatur usque ad punctum p positiva longitudine flexuque positivo, sed inde a puncto p a directione tangentialis rectae hujus puncti p , a linea cpd porrigitur et longitudine et flexurâ negativâ, quare hujus arcus ambae partes cadunt cis tangentialem dictam. Arcus vero ap, b , usque ad punctum p , construitur negative longus et negative flexus eundo retrorsum et deflectendo ad sinistram, sed inde a puncto p , tangentiali c, p, d , prolongatur antrorsum eundo et ad dextram flectendo, hoc est cum $+l$ et $+w$. Arcus autem $ap'b'$ usque ad punctum p' construitur antrorsum eundo, et versus sinistram deflectendo, sed trans punctum p' retrorsum eundo et dextrorsum flectendo, quare totus arcus $ap'b'$ est cis tangentialem $c'p'd'$. Arcus denique $ap'b'$ usque ad punctum p' porrigitur retrorsum eundo, dextrorsumque flectendo, sed inde a puncto p' antrorsum eundo et sinistrorsum flectendo, quare totus $ap'b'$ jacet cis tangentialem $c'p'd'$. Puncta ergo, ubi duplex haec mutatio oppositivitatis infit, sunt simul puncta flexus contrarii et puncta reversionis, et ob similitudinem arcus ejusmodi et rostri adunci (Krummschnabels) puncta rostri adunci s. cuspidis aduncaae vocari possunt.

§. 48. Notetur etiam figuris praecedentibus 15, 16, 17 punctum initii communis J arcuum quatuor in unam constructionem conjunctorum, cujus tangentialis linea est RR' , sive directio fundamentalis, esse respectu ad arcus duos supernos, aut ad duos arcus infernos punctum reversionis seu rostri acuti, respectu autem arcuum duorum ad diversam lineae RR' partem positorum punctum flexionis contrariae.

Fig. 14.

§. 49. Si in arcu curvae detur punctum, inde a quo proceditur positiva longitudine et positivo angulo, sed et ab eodem versus alteram partem negativa longitudine et negativo angulo, uti fig. 14 inde ab J versus b et b_1 , itemque ab J versus b' et b'_1 , ejusmodi punctum vocatur punctum verticis, seu simpliciter vertex; et cum ejusmodi punctum in curvae figuratione non appareat immediate (uti puncta flexus contrarii et puncta rostralia) punctis curvarum characteristicis latentibus adnumerandum est.

§. 50. Quilibet arcus cujuslibet curvae exordiens inde a puncto curvae characteristico aliquo, uti a puncto flexus contrarii, aut rostri aut verticis, vocatur curvae ramus; rami vero quilibet duo aut plures exeuntes ab eodem puncto curvae characteristico hypostatico nomine brachiorum designantur.

§. 51. Duae curvae secundum diversam legem, aut saltem secundum diversam magnitudinem unitatis longitudinalis $\bar{1}$ (§. 33) constructae continuo non plura uno puncto communia habere possunt. Si vero unum punctum habeant commune fieri potest ut in hoc puncto habeant directionem, ergo etiam tangentialem rectam, communem, quo casu curvae dicuntur se tangere seu osculari. Nisi vero in puncto communi se tangant, tunc sibi in ejusmodi puncto opponuntur definito angulo, qui exponitur angulo tangen-

tialium rectarum pro puncto communi $= \angle \beta$ fig. 18, $\alpha \dots \eta$; quo in casu, si utraque Fig. 18, $\alpha \dots \eta$. curva ultra punctum concursus amplius continuatur, dicuntur curvae se secare, et punctum vocatur punctum sectionis.

§. 52. Fieri quoque potest infinite multis modis, ut curva una eademque se ipsa tangat, et se ipsa secet, habeatque puncta suitactionis, aut suissectionis, aut utrumque simul; vel unum ejusmodi punctum, vel plura. Figura 19, $\alpha \dots \epsilon$, plures ejus- Fig. 19, $\alpha \dots \epsilon$. modi casus exhibet.

§. 53. Fieri etiam potest ut lineae curvae cum lineis rectis una lege conjungantur (§. 21) e. gr. ut linea recta transeat in lineam curvam, aut continuo, aut per flexionis saltum; priore in casu linea recta, quae est ejus puncti p , ubi curvatio incipit, tangentialis, vocatur aculeus rectus Fig. 20, α , in posteriori casu vero, ubi curva per an- Fig. 20, α . gulum quendam discontinuum, uti figura 20, β , $\angle \gamma$ transilit in directionem primae Fig. 20, β . tangents pn , aculeus obliquus nominatur.

§. 54. Linearum curvarum in genera divisio primaria nititur tribus spatii extensionibus s. dimensionibus. Aut enim extensio simplex s. linea directionem internam continuo mutat intra extensionem duplicem rectam, hoc est, in eodem plano, et vocatur curva plana; aut eadem mutat directionem secundum omnes tres spatii extensiones s. dimensiones. Cogitetur enim (fig. 21, a) curva incipere in definito puncto spatii J , et habere in Fig. 21, a. initio directionem RR' in spatio et insit directio RR' simul in plano $RR'A$. Inde a puncto J linea curva directionem quamlibet in spatio asciscere potest (fig. 4) ergo potest remanere in plano $RR'A$, unde oriatur curva plana, sed potest etiam continuo in aliud planum transire, e. gr. ita, ut curvae puncta J, b, c, d , (Fig. 21, b) sint ita Fig. 21, b. disposita, ut nunquam quatuor eorum continua sint in eodem plano. Ejusmodi lineae duplici respectu curvae sunt, ergo curvae duplicis vocantur curvaturae.

§. 55. Sed interna curvarum et planarum et dupliciter curvarum in genera divisio de curvedinis ipsius, qua talis, natura petenda est. Curvitas est continua extensionis quoad directionem cum longitudine conjunctam, mutatio, s. curvitas est continua formae extensionis mutatio (§. 18, §. 21), nam directionem esse lineae formam, longitudinem vero ejus materiam (sensu metaphysico) esse vidimus (§. 16). Quare omnis curvitatibus determinatio posita est in directionis internae definita ad longitudinem internam relatione; curvitatibusque adeo omnis diversitas posita est in hujus relationis diversitate, sive in lege (§. 21) definita, quae hanc momentorum internorum lineae relationem exhibet; quae igitur lex simul est curvae cujusvis definitio constitutiva, totam et omnem ejus essentiam, formamque determinans, e qua deinde innumerae ejusdem curvae mediatæ definitiones, relativæ et partiales fluant.

§. 56. Uniuscujusque curvae curvitas proinde definita est per legem, qua ejus longitudo cum continuo mutata directione conjuncta sit. Sed continuo mutata directio angulum internum cujusvis arcus (§. 44) curvae conficit, ita ut curva hoc respectu sit angulus flexus (§. 45) internus continuo fiens, et quidem continuo crescens. Quare etiam dicere possimus, lineae cujusvis curvitatibus esse in lege definita, qua definitus angulus in definita longitudine, cujus angulus internus est, contineatur. Curvitas ergo lineae est in definita lege, qua in ejus arcubus definita longitudo cum definito angulo conjuncta sit.

§. 57. Quodsi ergo curvedo, h. e. curvitas qua talis nempe definita longitudinis et anguli relatio, determinetur secundum omnes categorias, oriatur genuina s. originaria lineae curvae, per definitiones essentielles, totales et constitutivas, in genera et species

divisio. Ergo secundum substantialitatem essentiae curvedo aut identica, et semper eadem, est, aut non identica s. mutabilis; quoad quantitatem aut infinita est, aut finita, et quatenus curvedo finita est, eatenus ea magna est, et quantitatem s. magnitudinem continuam habet. Secundum relationis categoriam curvedo aut in se, aut ad extra consideratur; et relatio curvedinis externa se exserit in relationibus lineae curvae qua talis, ad puncta, ad lineas rectas et curvas, ad superficies planas et curvas, ad spatia finita s. solida sic dicta, imo etiam ad spatium, quatenus id est infinitum et tribus dimensionibus (§. 1 et §. 12) extensum. His vero curvedinis determinationibus et partitionibus, quae ex categoriis summis deducuntur, tota lineae curvae essentia exhaustitur, itaque omnis lineae curvae tractatio nihil aliud est quam organica harum determinationum evolutio et expositio *)

Fig. 22. §. 58. Principalis ergo curvae lineae divisio nititur curvedinis identitate aut diversitate. Curvedo identica erit, si lineae curvitas sit per totam ejus essentiam, hoc est per totam ejus longitudinem, eadem; hoc est, si cum qualibet eadem longitudine arcus conjunctus sit aequaliter magnus angulus internus, sive si per totam curvam eidem longitudini competat idem angulus flexus. Erit itaque hujus curvae non nisi unum genus, quia nimirum ejus tota essentia secundum meram identitatem constituta est, quae, quae talis, nullam diversitatem admittit. Poterit ergo ejusmodi curva vocari identica, uniformis, s. uniformiter curva, sive unicurva, quippe cujus curvitas una eademque est. Ex hac vero curvae uniformis constitutiva et totali definitione ultro sequitur, eam esse omnibus sui partibus perfecte sibi similem, ejusque partes omnes non differre inter se, nisi per meram magnitudinem; itemque sequitur: arcubus ejus aequaliter longis competere angulos flexus aequaliter magnos, ideoque in diversis ejusdem arcubus longitudes eorundem esse in eadem ratione, ac angulos internos. Ut in figura 22, si arcus deinceps positi ab , bc , cd sint aequaliter longi, erunt etiam anguli flexus eorundem interni aequales angulo α . Arcus ergo duplex longitudine abc , continebit angulum $= 2\alpha$, triplex angulum $= 3\alpha$, z — tuplex (§. 37) angulum $= z\alpha$.

§. 59. Omnis adeo lineae curvae identicae s. unicurvae tractatio, quam secundo horum speciminum exhibeo, nihil erit, quam definitionis hujus (§. 58, §. 21) constitutivae ulterior determinatio, atque evolutio principalium proprietatum internarum et ad extra relativarum, quae per eandem definitionem dantur. Et quamvis curva uniformis sit omnium simplicissima, infinitam tamen speculandi materiem continet, ut, quo altius intellectus finitus in ejus naturam penetret, eo profundiores detegat abyssos, finita mente ne per infinitum quidem tempus exhaustiendos.

§. 60. Jam vero alterum partitionis lineae curvae membrum est (§. 57) linea curva non identica; quae ergo erit talis, cui competat momentorum curvedinis, nempe longitudinis et anguli ratio continuo mutata s. variata; quare ea vocabitur curva multiformis s. versiformis s. brevi: versicurva. Versicurvae nomen aptius est quam multiformis, cum multum opponatur uni, sed linea non identica, quamvis continuo aliter curva, nihilominus formae unitatem h. e. unam definitam qualitatem involvit.

*) Legum omnium, in una et unica cogitandi lege contentarum, organismum, secundum quem omnis omnium rerum scientifica formatur cognitio, docui in libris: Abriss des Systemes der Logik, 1825 et 1828; Vorlesungen über das System der Philosophie, 1828.

§. 61. Et cum omne, quod non est in se identicum, diversitatis internae ulteriorem determinationem secundum categoriarum organismum postulet, idem etiam de curva versiformi valet; idque sine fine. Quodsi ergo Geometria velit omnium, quae dantur, curvarum genera, vel quoad eorum definitiones constitutivas recensere et intueri, hoc finito tempore nunquam exhauret. At Dei intellectus divinus, uti omnia, ita et infinite multa curvarum genera omnia, uno obtutu aeterno perfecte perspicit continuo omni tempore.

§. 62. Jam ut generaliter definiamus, in quo curvedo non identica s. continuo mutata consistat, determinanda est, ratio longitudinis et anguli cujusvis arcus continuo mutans, et quidem cum anguli arcus ad longitudinem ejus, tum longitudinis arcus ad angulum arcus. Quodsi ergo primum referatur angulus ad longitudinem arcus et sumantur, fig. 23, a et b, deinceps arcus $ab, bc, cd, \dots$ longitudine aequales, erunt ergo eorum- Fig. 23, a, b. dem anguli flexus interni, nempe $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ secundum definitam legem (§. 21) inaequales, si nimirum anguli arcuum continuo proximorum, utut parvorum, considerentur. In figura 23, a, ea inaequalitas obtinet ut quivis angulus arcus proxime insequen- Fig. 23, a. tis sit proxime praecedente angulo minor; at in figura 23, b, contra ut quivis subsequens Fig. 23, b. angulus sit praecedente major. Secundo, si ejusdem lineae versicurve curvitas mutatio dijudicetur per rationem longitudinis arcuum ad eorundem arcuum angulos internos, et sumantur fig. 23, c et d, anguli deinceps positi $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ aequales, erunt ergo lon- Fig. 23, c et d. gitudines arcuum $ab, bc, cd, \dots$ inaequales, et quidem, fig. 23, c, continuo majores, fig. vero 23, d, continuo minores.

§. 63. Idem valet de longitudinibus angulisque arcuum deinceps positorum, atque in eodem puncto J incipientium (fig. 23) $ab, ac, ad, \dots$ et de angulis $\alpha, (\alpha + \beta), (\alpha + \beta + \gamma), \dots$ Hoc est, in omni linea versicurve, si (fig. 23) assumatur cujuslibet Fig. 23. puncti in eadem positi linea tangentialis RR' , et fiat inde ab hoc puncto tangentiali J constructio arcuum $ab, ac, ad, \dots$ ita ut hi arcus sint quoad longitudinem $= 1, 2, 3, \dots$, tunc anguli, quos tangentiales punctorum $b, c, d, \dots$ conficiunt cum directione initiali RR' , nempe anguli $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ non crescent ut iidem numeri, sed alia ratione aut crescent aut decrescent (fig. 23, a et b); et viceversa, si in aliqua linea curva multiformi anguli punctorum finalium arcuum $ab, ac, ad, \dots$ quos tangentiales rectae dictorum punctorum cum directione fundamentali RR' conficiunt, crescant in ratione $1, 2, 3, \dots$ tunc longitudines eorundem arcuum non in eadem ratione crescent, sed potius in alia ratione aut crescent aut decrescent.

Imo ex definitione versicurve (§. 60) generaliter sequitur: si sumantur vel arcus deinceps positi $ab, bc, cd, \dots$ (fig. 23), vel arcus, inde ab eodem puncto J , conse- Fig. 23. cutivi $ab, ac, ad, \dots$ (fig. 23) atque eorundem anguli flexus vel deinceps $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ vel secundum unam directionem fundamentalem RR' consecutivi ut $\alpha, (\alpha + \beta), (\alpha + \beta + \gamma) \dots$ sive $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$, et ponantur dictorum arcuum longitudines definita lege rationum aut commensurabilium aut incommensurabilium aut crescere aut decrescere, tunc dictos angulos non secundum eandem rationum legem sed secundum aliam definitam rationum legem, aut crescere aut decrescere. Alioquin enim haberetur curva identica.

§. 64. Si in curva versiformi ad aequaliter longos arcus continuo majores anguli pertinent, tunc ejus curvatura crescit, si autem continuo aequales longitudine arcus semper minoribus angulis deflectunt, curvae curvatura continuo decrescit, propiorque continuo ad rectae naturam accedit. Si lineae versicurve definitum consideretur punctum, habet ea in hoc puncto primum definitam directionem, quae exponitur linea recta tangentiali (§. 18), sed secundo etiam habet definite magnam in hoc puncto curvaturam.

Curvaturae vero in quovis versicurve puncto magnitudo exponitur per lineam curvam uniformem seu identicam eam, quae habet perpetuo eandem curvaturam, quam versicurve habet in hoc definito puncto. Quomodo autem haec curvaturae in quovis versiformis puncto per lineam identice curvam expositio fiat, ostendi demum potest curvae identicae naturâ ad hoc sufficienter perspectâ. (Videantur infra, specimine tertio, ni. 148 — 151).

§. 65. Cum omnes quantitatum relationes exprimantur per functiones omnes analyticas: erunt ergo omnes functiones analyticae expressiones omnes etiam omnium curvarum, organismusque formarum analyticarum erit etiam expressio omnium generum curvarum versiformium. Cum ergo omnes functiones analyticae dividantur in algebraicas et transcendentes, erunt ergo et curvae aut algebraicae aut transcendentes. Et cum curvae planae non sint plura quam duo momenta, longitudo nimirum et angulus flexûs, quae signantur per l et w , erit ergo expressio analytica generalissima definitionis generalis curvae $l =$ functioni anguli w , vel $w =$ functioni longitudinis l . Ubi notandum est, subintelligi unitatem angularem $= \bar{1}$ (§. 33) et longitudinarem $= \bar{l}$ (§. 33), esseque adeo l et w proprio sensu factores multiplicativos generales. Ex. gr. cum in curva identica l et w habeant semper eandem rationem, ut sit $l . \bar{1} . . w . \bar{l} = p . . q$ (§. 58), habebitur $ql . \bar{1} = pw . \bar{l}$, sive $l . \bar{1} = \frac{p}{q} w . \bar{l}$. Quamquam autem longitudo et angulus sint quantitates heterogeneae, tamen nihilominus proportio generalis locum habet $l . . w = p . . q$, sine respectu habito ad unitates $\bar{1}$ et $\bar{l}$ disparatas. Quamvis ergo aequatio $l = \frac{p}{q} w$ proprie tantum denotet: cum arcu, cujus longitudo sit l — tuplum unitatis longitudinaris, conjunctum esse angulum w , qui sit $\frac{p}{q} w$ — tuplum unitatis angularis: tamen nihilominus cum hac suppositione simul sequitur factorem generalem l esse aequalem factori composito generali $\frac{p}{q} w$. Lineae curvae planae, quarum lex exprimitur per functiones algebraicas, quas ergo algebraicas curvas nominare licet, habent infinite multos ordines, qui respondent omnibus aequationum algebraicarum ordinibus, quare curvae algebraicae primi ordinis sunt formae $\pm al \pm bw \pm c = 0$; secundi: $\pm al^2 \pm bw^2 \pm clw \pm dl \pm ew \pm f = 0$; tertii: $\pm al^3 \pm bw^3 \pm cl^2w \pm dlw^2 \pm el^2 \pm fw^2 \pm glw \pm hl \pm iw \pm \kappa = 0$; et sic porro in infinitum; ubi signa $+$ et $-$ terminorum omnium minime invicem dependent. At fere omnes horum ordinum algebraicorum curvae methodo hac originaria tractatae, Geometris adhuc ignotae remansere, excepto circulo, cujus formula analytica generalis secundum methodum originariam est $\pm al \pm bw \pm c = 0$, excepta quoque circuli evolvente, de qua videatur specimen quintum, et spirali logarithmica originaria longitudinari. Mihi vero, methodi curvarum originariae inventori, contigit esse ita felici, ut jam omnes novendecim secundi algebraici ordinis lineas originarias, cum earundem lineis evolutis et evolventibus ex formulis generalibus construendo discusserim et curvarum praeterea multarum, per methodum coordinatarum rectarum jam bene notarum aequationes originarias *)

*) Ex. gr. aequationes originarias sectionum conicarum Appollonianarum, cycloidis, et logarithmicae vulgaris; quarum aequationes originariae sunt functiones trigonometricae, inter se proxime affines, uti monui in praefatione.

per formulam reductionis generalem invenerim. Sed nunc, his primis hujus novae theoriae speciminibus, linearum simplicissimarum theoriam originariam generalem brevi et elementariter exponere sufficiat.

§. 66. Lineam ergo methodo analytico-geometricâ, eâque originaria ac plane generali discutiendi processus hic est. Primo assumatur definita functio, aut $l =$ functioni w , aut $w =$ eidem functioni l , sive aut $l = fw$ aut $w = fl$; sive, cum in his functionibus occurrant etiam constantes $a, b, c, \dots$ (§. 65), assumatur aut $l = f(w; a, b, c, \dots)$ aut $w = f(l; a, b, c, \dots)$; ita ut linearum curvarum planarum natura generaliter exponatur per $F(l, w; a, b, c, \dots)$, si F denotet functionem quamlibet, l longitudinem, w angulum, et $a, b, c, \dots$ constantes. Secundo assumatur in definito plano definita directio quaelibet RR' pro directione fundamentali, cujus parallela recta per quodlibet describendae curvae punctum agi possit, et ad quam deinde omnes anguli flexûs curvae ope tangentialium rectarum (§. 18) referantur et mensurentur. Tertio accipiatur punctum definitum J in eodem plano, pro initio longitudinis arcuum. Quarto, assumatur arbitrario definita linea recta pro unitate longitudinis omnium arcuum, $\bar{1}$; itemque definitus angulus arbitrarius pro unitate omnium angulorum curvae, $\bar{1}$ (§. 33). Functione assumtae nunc dentur omnes valores principales s. elementares, ponendo pro l et pro w , seorsim, deinceps valores $\pm 0, \pm 1, \pm \infty, \pm a, \pm b, \pm c, \pm \dots$, et videatur, quinam pro singulis his acceptionibus functionis valor evadat.

Exemplo sit functio $l = b \cdot \log. w$; ubi b est constans arbitraria, et $\log. w$ denotat logarithmum numeri w in systemate logarithmico eo, cujus basis est numerus constans a ; et sit a , exempli gratia, > 1 , quin etiam $b > 1$. Assumptis ergo pro constructione curvae, per hanc functionem datae, iis omnibus, quae modo recensita sunt, et facto $l = 0$, erit $b \cdot \log. w = 0$, proinde $w = 1$; ergo in puncto initiali J haec curva habet directionem eam, quae a directione fundamentali RR' distat angulo, qui est unitati longitudinalinari $\bar{1}$ aequalis. Posito jam $l = 1$, erit $b \cdot \log. w = 1$ ergo $\log. w = \frac{1}{b}$; atque

$a^{\frac{1}{b}} = w$; facto $l = -1$, erit $\bar{a}^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{b}}} = w$. Assumpto $l = +\infty$, erit $b \cdot \log.$

$w = +\infty$, ergo $\log. w = \frac{+\infty}{b} = +\infty$, proinde $w = a^{\infty}$, qui valor est, ob

$a > 1 = +\infty$. Facto autem $l = \infty$, erit $a^{-\infty} = w$; hoc est $\frac{1}{a^{\infty}} = w$, qui

valor est, ob $a > 1 = 0$. Ergo pro longitudine arcûs infinitâ negativa haec curva habet tangentialem directioni fundamentali RR' parallelam.

Et cum numerorum negativorum logarithmi non dentur continui, sequitur w negativum assumi non posse. Per hos jam valores satis definitur curvae hujus figura talis, qualem fig. 24 exhibet; et habet haec curva duo brachia longitudine infinita inde a puncto J , quorum alterum infinite multis gyrationibus adpropinquat ad ideale punctum M , alterum vero continuo magis ad rectitudinem accedendo adpropinquat parallelismo cum directione fundamentali RR' . Fig. 24.

§. 67. Quaelibet ergo functio dupliciter per lineam curvam exprimi potest, nempe aut discutiendo $l = f(w; a, b, c, \dots)$ aut discutiendo $w = f(l; a, b, c, \dots)$. Quodsi secundum functionem $l = f(w; a, b, c, \dots)$ determinetur longitudo ope an-

guli w , linea prodiens vocetur hujus functionis linea angularis; si autem contra secundum functionem $w = f(l; a, b, c, \dots)$ determinetur angulus w ope longitudinis l , linea curva inde constructa vocetur linea hujus functionis longitudinalis. Quamquam vero pro duabus his expressionibus assumatur eadem functio, tamen curva longitudinalis per eandem constructa erit plerumque, paucis casibus exceptis, formâ diversa a curva ejusdem functionis angulari. Ex. gr. curva logarithmica spiralis longitudinalis, determinata per functionem $w = b \cdot \log. l$ ab angulari formâ plane differt. Nam pro $l = 0$ erit $\frac{w}{b} = -\infty$. Ergo haec curva negativo angulo infinito circumgyrat punctum suum initiale J . Pro $l = +1$ erit $w = b \cdot \log. 1 = b \cdot 0 = +0$; ergo arcus longitudinis $+1$ habet directionem cum RR' parallelam; pro $l = +\infty$

est $a^{\frac{w}{b}} = +\infty$, ergo $w = +\infty$, hoc est, haec curva infinito angulo 'positivo et infinita longitudine inde a valore $l = +1$ circumgyratur orbibus semper amplioribus. Negativae l non dantur, quia numerorum negativorum logarithmi generaliter impossibiles sunt. Unde prodit spiralis logarithmicae originariae longitudinalis forma ea, quam fig. 25 exhibet. Et hanc quidem lineam nomine spiralis logarithmicae Geometrae bene norunt sed secundum methodum polarem; angularis vero eosdem, quod sciam, plane effugit. Harum spiraliû logarithmicarum constructionem equidem libro singulari inedito absolvi.

Fig. 25.

Specimen secundum.

***De linea uniformiter curva,
sive de circulo.***

Specimen secundum

De linea uniformiter curva,

sive de circulo.

§. 68. Omnes curvae curvaturam aut semper eandem s. uniformem habent, aut semper mutatam, s. versiformem. (57, ss.). Primum quidem genus simplicissimum est; ac sicuti omnis curva necessario ita refertur ad lineam rectam, ut ejus directio, quam in quovis puncto habet, per lineam rectam tangentialem (§. 18, §. 64) exponatur, ita etiam omnis curva non uniformis s. versiformis necessario refertur ad curvam uniformem, ut curvedinis ejus appareat magnitudo et definita curvatura, quam in quovis puncto habeat. Quod hic generaliter intelligitur, in sequentibus autem construitur. (Videatur specimen III.).

Cum vero linea uniformiter curva sit quoad curvedinem identica h. e. semper eadem (§. 57, s), erit ergo lineae uniformiter curvae non nisi unum genus, uno distincto Geometriae capite illustrandum. In sequenti lineae uniformiter curvae s. circuli theoria hoc evitari, uti in materia tritissima, neque potuit neque debuit, ut memorarentur multa omnibus nota. Quae partim etiam ob hoc poferuntur, ut monstretur, quomodo ea ex definitione originaria circuli, secundum novam hanc curvas considerandi methodum, fluant; partim vero quaedam theoremata, et formulae expressionesque analyticae et in aliis libris obviae hic tractandae erant, quia eadem in sequentibus opus erant. Partim vero etiam quaedam ex iis de circulo theorematibus exposui, quae quamvis jamdudum ab aliis inventa, in elementa tamen Geometriae nondum adhuc recepta viderem; — sed vel ex his tantum ea, quibus in sequentibus nonnullae demonstrationes superstrui deberent, e. gr. theoremata de sectione harmonica et de lineis harmonicalibus ad circulum, a *de la Hire* jam olim tradita, quibus nituntur ea, quae infra de sectionibus conici circularis (speciminibus ulterioribus) tractanda sunt. Quamvis enim in operibus, quae de Geometria elementari conscripta sunt locupletioribus, inprimis *Bertrandi*, *Gilberti*, *Schweinsii*, praecipue autem *Crellii*, multa quidem de iis, quae ante neglecta imo perperam fuerant omissa, in Geometriae corpus tandem suscepta atque digesta sint, tamen longe plura de circulo theoremata essentialia jamdudum inventa etiam illuc introducenda restant; ex quibus ergo nonnulla vel in hac perbrevis de circulo theoria recepta cognoscent lectores Geometricarum rerum gnari. —

§. 69. Primum ergo ita consideranda est linea uniformiter curva, ut ejus proprietates primariae ex ejus definitione primaria s. constitutiva evolvantur (§. 21) modo ut dicunt elementari; deinde vero etiam demonstrantur quaedam ejusdem proprietates ope Analyseos altioris. Sunt quidem qui distinguant methodum sic dictam mere geometricam s. Euclidean a methodo analytico-geometrica; et quidem ita, ut in priori methodo non nisi numerorum ac rationum proportionumque sic dictarum geometricarum theoria vulgaris in auxilium vocetur, in methodo vero analytico-geometrica Algebra et Analysis finitorum et infinitorum ad demonstrationes geometricas adhibeatur. Quamquam haec methodi distinctio nominibus non rectis appelletur, tamen nihilo minus in rei natura fundatur; ideoque et nos eandem hic sequemur.

Sectio I.

Theoria elementaris circuli.

§. 70. Definitio curvae uniformis est, ut ejus curvitas semper sit eadem s. identica (§. 21, §. 57, s.). Quae definitio, cum omnem definiti essentiam contineat (§. 21), ex eadem ergo rite constructa tota circuli natura perspicui debet; quin etiam relationes omnes, quas curva uniformiter curva habet ad alias spatii determinationes sibi externas, uti ad puncta, lineas, superficies, atque ad solida finita et infinita (§. 32 ss.), colligi et discuti debent ex curvae uniformis constitutiva definitione conjunctâ cum constitutivis definitionibus rerum ad quas ea refertur.

§. 71. Cum omne id, quod identicum est, qua tale ulteriorem specificationem s. differentiam essentialem non admittat, sequitur etiam lineam curvam identicam, qua talem, species diversas non admittere seu logice in se continere. Ergo linea, quae nunc explorabitur, in suo genere unica est; et si dentur lineae uniformiter curvae diversae, haec diversitas alia quam quantitativa esse nequit.

Fig. 25, b. §. 72. Ex definitione curvae generali pro omni curva, ergo etiam pro uniformi, primum sequitur: si in illa sumatur arcus definitae longitudinis, ei competere debere angulum arcualem seu internum (§. 38, §. 44) definitum definitae magnitudinis. Sit ergo, per ea, quae Specimine I. n. 40 exposita sunt, fig. 25, b, directio fundamentalis RR' , ac in puncto a ponatur initium longitudinis arcus; ita ut arcus ipse abc in puncto a habeat directionem fundamentalem lineae RR' , adeoque sit anguli, ab ipso puncto a descripti valor $= 0$; idque ita ut arcus crescat progrediendo a puncto a versus puncta b et c . Arcus ergo pro lubitu assumendus abc in puncto finali habet etiam directionem definitam, quae eadem exprimitur per lineam rectam ejus puncti directricem s. tangentialem (I. n. 40) tc , quae ergo cum directione fundamentali RR' efficiet angulum definitum, qui sit $= w$.

§. 73. Cum autem linea haec uniformiter curva sit, sequitur, arcus longitudinem atque anguli ab arcu contenti magnitudinem semper in eadem ratione crescere; sicuti etiam, si regrediatur linea, inde a puncto a similiter decrescere. Si ergo sumatur arcus longitudine duplex, habebit hic angulum internum flexus etiam duplicem, triplex triplicem, m — duplex m — tuplicem. Cum ergo et longitudo in se infinita sit (§. 14), uti et angulus flexus (§. 37), sequitur, hanc lineam infinitis revolutionibus continuari, idque versus utramque a puncto initiali plagam. Ergo haec linea utrinque infinita est, et secundum longitudinem, et secundum angulum, habetque inde a puncto a ramos duos infinitos, quae quidem ob perfectam eorum similitudinem brachia vocari possunt (§. 50). Unde simul sequitur, utrinque eam infinitoties in directionem fundamentalem reverti, idque modo utrinque plane uniformi.

Fig. 25, a. §. 74. Jam si versus utramque a puncto initiali plagam (fig. 25, a) sumantur arcus aequales deinceps positi ut $ab, bc, cd, \dots$ et $ab', b'c', c'd', \dots$ erit angulus in quovis horum arcuum contentus, secundum definitionem lineae, aequalis; ideoque anguli inde a directione fundamentali ex angulis uniuscujusque dictorum arcuum compositi crescent, utrinque secundum numeros integros anguli w , qui pro unitate angulari (§. 32) assumi potest, ut et unitatis longitudinalis arcus ab , uti fig. 25, a, exhibet.

Unde simul sequitur, si sumantur (fig. 25, c), arcus deinceps positi magnitudine impares, ut ab , bm , sive ab' , bm' , eosdem continere angulos quoque impares; et quidem arcum majorem continere angulum majorem, minorem vero minorem. Omnis linea curva est angulus pro definita lineae longitudine continuus (§. 44), sive omnis linea curva inde a quovis ejusdem puncto usque ad quodvis aliud punctum flexu suo definitum magnitudine angulum continet; ergo etiam linea uniformiter curva, atque haec ex conditione, ut anguli arcubus contenti sint proportionales magnitudinibus arcuum, s. longitudinibus arcuum.

Fig. 25, c.

Et quum linea curva in omni puncto sit quoque definite directa, sive habeat directionem determinatam, quae exprimitur sive exponitur per lineam rectam quae in eodem puncto curvam tangit (§. 18); et cum in hac linea uniformiter curvâ flexio seu conversio fiat continuo versus eandem plagam; sequitur, angulum qui continetur definito arcu in hac linea exponi etiam per angulum, quo intersecantur lineae duae rectae ad puncta dicti arcus finalia curvam tangentes, si nimirum hae duae rectae ad puncta dicti arcus finalia curvam tangentes secundum eandem ambae directionem sibi oppositae sint, secundum quam linea curva convertitur. Uti in figurâ 25, e, ubi et arcus et lineae tangentes ag , ei , fk , gd , versus eandem plagam directae sunt, angulus geb est aequalis angulo continuo arcus ab , angulus gfc aequalis angulo arcus abc , sive aequalis angulis $ihk + geb$, hoc est angulis internis arcuum ab et bc simul sumtis; angulus lgd aequalis angulo interno arcus ad ; simulque $\angle lgd = \angle geb + \angle ihk + \angle mkd$, sive aequalis angulorum arcuum $ab + bc + cd$ summae.

Fig. 25, e.

Hoc ergo per totam hanc lineam curvam continuo obtinet sine fine; minime vero in alia quacunque curva. Siquidem in omni curva non uniformiter curva puncta sumantur satis sibi propinqua, etiam de arcubus per haec puncta definitis eo propius valet id, quod diximus. Nam cum haec proprietas ex absoluta curvae identitate fluat; ex quavis vero curvedinis mutabili ratione hujus proprietatis negatio; sequitur: nullam versicurvam lineam habere dictam proprietatem; quam si haberet, uniformiter curva h. e. circulus esset. Si e. gr. puncta reversionis aut flexus alicui curvae per ejus naturam insint (§. 40 s., §. 45 s.), tunc haec propositio tantum obtinet hac lege, ut etiam opposivitatis directionis angulorum debitus habeatur respectus. (Videatur de hac re Specimen tertium).

§. 75. Jam vero quia curva cogitatur identica quoad curvitatem, curvitatibus vero qualitas (§. 20) consistat in definita relatione rationis angulorum arcualium ad rationem longitudinum eorundem arcuum; et cum haec relatio in curva identice curvâ necessario sit identica, quantitas vero et longitudinis et anguli sit continua, quae omnes rationes quantitativas et rationales et irrationales admittat; sequitur, in hac curva generaliter se habere arcuum inde ab initio sumptorum longitudines ut anguli ab ipsis contenti, qui quidem iidem sunt cum angulis, quos dictorum arcuum tangentes faciunt cum linea tangentiali initii communis dictorum arcuum, hoc est cum linea directionis fundamentalis, quam vocavimus RR' . Si ergo figurâ 25, d, assumantur arcus duo, ut ab et ac in ratione $m \dots n$ aut commensurabili aut incommensurabili, erunt ergo etiam anguli duo, w_0 et w_1 , ab ipsis contenti in ratione $m \dots n$. Et est haec primaria curvae identicae proportionalitas, quae ab unitatum et longitudinis et anguli individuali quantitate, pro arbitrio assumenda, plane non dependet. —

Fig. 25, d.

§. 76. Et cum in quavis proportionē etiam terminorum homologorum differentiae sint proportionales, sequitur etiam duorum arcuum deinceps sumptorum, ut ab , bc , rationem esse eandem cum ratione angulorum ab ipsis contentorum. Hoc est:

ex $ab \dots ac = w_0 \dots w_1 = m \dots n$ sequitur:

$ab \dots ac - ab = w_0 \dots w_1 - w_0 = m \dots n - m$, sive

$ab \dots bc = v_0 \dots v_1 = m \dots n - m$, sive

$\lambda \dots \lambda_1 = v_0 \dots v_1 = m \dots n - m$.

Et cum haec proportionalitas angulorum et arcuum ex lineae uniformitate sequatur, neque sine hac obtineat, sequitur in omni linea curva versiformi s. non identica, neque hanc proportionem arcuum et angulorum primariam, neque illam angulorum et arcuum deinceps positorum secundariam generaliter et continuo obtinere posse, quippe quia altera sine primaria illa adesse non potest; nec vice versa primaria sine altera, uti in proportionum theoria generaliter docetur. —

§. 77. Si ergo assumantur arcus deinceps positi, ut ab , bc , $cd \dots$ quotvis in proportionē continua decrescente, erit summa eorundem finita, ideoque etiam summa eorundem angulorum finita; ideoque tum, constructio, ob limitationem idealem arbitrario assumptae legis, ultra longitudinem definitam, angulumque definitum progredi non potest, quamquam in se secundum objectivam realemque suam naturam utrinque infinita sit.

§. 78. Antequam vero ulterius procedamus, recordemur eorum, quae in introductione generali dicta sunt (spec. I, §. 32) de unitatibus absolutis longitudinis et anguli, quas signavimus per $\bar{1}$ et $\dot{1}$. Sunt quidem hae unitates a se invicem plane non dependentes, immo disparatae, quippe quod longitudo et angulus sunt res essentia diversae, ergo quoad magnitudinem non possunt comparari. Sed tamen si omnes longitudes arcuum referantur ad unitatem longitudinarem absolutam, pariterque et anguli omnes ad dictos arcus pertinentes ad unitatem suam angularem absolutam, nihilominus poterunt esse hae diversi generis magnitudines in suo quaelibet genere proportionales aut non proportionales. —

§. 79. Si ergo curvae uniformis constructio debeat esse individualiter definita, ante omnia opus est, ut pro arbitrio assumatur et unitas longitudinaris $\bar{1}$ individualiter definita, et unitas $\dot{1}$ angularis itidem individualiter definita, ad quas uti ad mensuras communes omnes arcus secundum longitudinem et angulum definiantur et mensurentur. Unitas longitudinaris quidem exprimi potest per lineam rectam ei aequalem, unitas vero angularis per angulum planum rectilineum ei aequalem. Si ergo (fig. 25, a) arcus abc longitudo debeat determinari, ea referri debet ad unitatem sui generis $\bar{1}$, et erit ergo $= p \cdot \bar{1} = p$, denotante p omnem factorem realem inde ab 0 usque ad infinitum, quippe quia haec curva (§. 73) quoad longitudinem infinita est. Similiter angulus w , quem arcus abc continet, necessario refertur ad unitatem sui generis $\dot{1}$, et erit is $= q \cdot \dot{1} = q$.

Fieri quidem potest, ut pro angulari unitate adsumatur angulus hypostaticus (§. 32) aut totius conversionis $= 360^\circ$, aut angulus totius oppositionis (§. 33) $= 180^\circ$, aut utrinque aequalis oppositionis s. rectus $= 90^\circ$. Attamen etiam pro curvae uniformis generali constructione uti pro curvis omnibus (§. 32) liberum relinqui debet, quinam angulus assumatur pro unitate angulari $\dot{1}$; qui deinde poterit exprimi per totius conver-

sionis partes et subpartes, hoc est per gradus, et per partes gradus minutas, secundas etc. (§. 38). Quo in casu $\bar{1}$ signabitur per 1° . —

§. 80. Neque tamen sufficit ut pro linea uniformiter curva construenda assumatur pro arbitrio et unitas longitudinalis $\bar{1}$, et unitas angularis $\bar{1}$ (§. 32), sed necessarium etiam est, ut hae unitates inter se una constructione individualiter conjungantur, hoc est ut unitas longitudinalis attribatur uni definito arcui, et unitas angularis alii definito arcui. Id quod duplici modo fieri potest; aut ita, ut ambae unitates $\bar{1}$ et $\bar{1}$ adtribuantur arcui uni eidemque, cujus ergo unitas longitudinalis sit longitudo, unitas vero angularis angulus internus (fig. 25, a); aut ita, ut arcus cui unitas longitudinalis ut longitudo attribatur, sit ab arcu, cui unitas angularis ut ejus angulus internus adscribatur, diversus.

§. 81. In quovis circulo definito, cujusvis arcus angulus debet esse definitum multipulum unitatis angularis $\bar{1}$ pro arbitrio assumptae; sicuti ejusdem arcus longitudo definitum esse debet multipulum unitatis longitudinalis pro arbitrio assumptae. Si ergo definitus aliquis arcus sit $= A$, et ejus longitudo L (collato §. 84) sit $= p \cdot \bar{1} = p$, ejus vero angulus W sit $= q \cdot \bar{1} = q$; erit ob curvatis identitatem haec longitudinis et arcus relatio pro omnibus arcubus constans, sive generaliter $l \dots L = w \dots W$, hoc est $l \dots p = w \dots q$, ergo $l = \frac{p}{q} w$, et $w = \frac{q}{p} l$. Si ergo alius cujusvis arcus longitudo sit l' , angulus vero w' , erit $l' \dots L = w' \dots W$ hoc est $l' \dots p = w' \dots q$, proinde (secundum leges proportionalitatis generales) $l' = \frac{p}{q} w'$ et $w' = \frac{q}{p} l'$.

§. 82. Si in aequatione $l = \frac{p}{q} w$, w ponatur aequalis unitati angulari $\bar{1}$, tunc erit $l = \frac{p}{q} \bar{1}$; hoc est: in quovis circulo longitudo ejus arcus, cujus angulus acceptus est pro unitate angulari, est $= \frac{p}{q} \cdot \bar{1}$ hoc est $\frac{p}{q}$ — tuplum unitatis longitudinalis. —

Si contra l ponatur $= \bar{1}$ erit $w = \frac{q}{p} \cdot \bar{1}$. Et si in circulo aliquo pro $l = \bar{1}$ simul sit et $w = \bar{1}$, erit etiam $\frac{p}{q} = 1$, sive $p = q$.

§. 83. In omni curva aut considerantur arcus, qui omnes a puncto initiali J eodem originem trahunt cum angulis suis, qui omnes conficiuntur a tangentiali recta cum directione fundamentali RR' ; aut arcus et eorundem anguli consecutivi, qui sunt arcuum et angulorum ab initio longitudinis J et a directione fundamentali exeuntium differentiae. Cum ergo in curva identica et arcus ab initio omnes cum angulis suis ad directionem fundamentalem relatis omnibus sint proportionales; pariterque etiam arcus omnes deinceps positi ad angulos suos internos sint quoad longitudinem proportionales (§. 76); sequitur: in curva uniformi duo curvas considerandi genera nihil inter se differre. Et est quidem haec una ex characteristicis et exclusivis hujus curvae proprietatibus, quae a magnitudine unitatum $\bar{1}$ et $\bar{1}$ arbitraria non dependent.

§. 84. Habeant ergo omnes arcus initium quodlibet commune, omnesque arcuum anguli referantur ad directionem fundamentalem RR' , quae curvam tangat in J , id quod semper fieri potest, quia circulus, qui infinites circumvolvitur, omnes directiones in plano possibles infinite multis punctis habet. Et vocemus seriem longitudinum arcuum

... l_{-2}, l_{-1}, l_0 sive $l, l_1, l_2, \dots$; seriemque angulorum earundem longitudinum ad directionem RR' fundamentalem relatorum ... w_{-2}, w_{-1}, w_0 seu $w, w_1, w_2, \dots$; atque generaliter arcus cujusvis longitudinem nominemus $l \cdot \bar{1}$, seu unitate subintellecta l , angulumque quem curva in ejusdem arcus fine facit cum directione fundamentali RR' nominemus $w \cdot \bar{1}$ seu w , ita ut literae l et w non designent aliud, quam factores generales inde a valore ± 0 usque ad valorem $\pm \infty$, ita ut l et w sint factores quilibet reales inde ab ± 0 usque ad $\pm \infty$. Quare si brevitatis causa subinde scribatur in formulis construendis curvis inservientibus l et w , unitates $\bar{1}$ et $\bar{1}$ semper subintelligantur necesse est. Literae l et w tunc designant quidem curvae arcuum longitudines atque angulos, sed tantum quatenus per legem curvae analytice expressam dantur, minime vero hypostatice (s. objective) uti in spatio dantur per se. Quare in omnibus casibus, ubi curvae cujusvis arcuum longitudines et anguli considerantur in se hypostatice, longitudines denominabuntur per L , anguli vero earundem per W .

§. 85. Si ergo assumatur unitas longitudinalis $\bar{1}$, et angularis $\bar{1}$, dabitur in quovis circulo inde a puncto initiali J definitus arcus A , cujus longitudo L est $= \bar{1}$, similiterque ab eodem puncto initiali in quo curva habet directionem fundamentalem RR' , dabitur definitus arcus B , cujus angulus internus, qui in curva identica est idem cum angulo finali (§. 72) relativo ad RR' , est $= \bar{1}$. Poterunt quidem unitates $\bar{1}$ et $\bar{1}$ ita assumi, ut idem arcus habeat longitudinem $\bar{1}$ simulque et angulum $= \bar{1}$; quo in casu arcuum omnium longitudinibus cum angulis semper convenit idem multipulum seu idem factor, hoc est quot vicibus arcus quilibet continet $\bar{1}$, tot vicibus etiam ejus angulus continet $\bar{1}$. Ubi probe notandum est, hoc aequale multipulum et rationale seu numerum et irrationale cujusunque generis esse posse, cum et arcus et anguli ad se invicem in iisdem punctis curvae pertinentes ambo continuo, idque in eadem ratione, simul aut crescentes aut decrescentes, omnes possibiles rationes rationales et irrationales continuo percurrant. —

Fig. 25, b. Si autem contra unitates $\bar{1}$ et $\bar{1}$ ab eodem puncto initiali J sumptae non ad idem curvae punctum pertineant (Fig. 25, b), hoc est, si arcus, cujus longitudo assumpta est pro unitate longitudinali non sit arcus eum angulum continens, qui assumitur pro unitate angulari: tunc pro quovis arcu ejus longitudinis ejusque anguli per totam curvam eadem relatio obtinet, quia longitudo arcus et ejusdem arcus angulus proportionaliter crescunt aut decrescunt (§. 73). Si igitur aliquis angulus de sua unitate sit multipulum q , longitudo vero hunc angulum continens sit suae unitatis multipulum p , ergo omnium arcuum longitudo et angulus erunt, ad suam unitatem relata, multipla q et p , multiplicata per eundem factorem, hoc est ut $m q$ ad $m p$, quae ratio est $= q \dots p$. — Si ergo signa l et w ad omnem arcum ita referantur, ut ejusdem arcus cujuslibet longitudinem et angulum designent: erit generaliter $l \dots w = p \dots q$, ubi tamen signum $\dots$ proprie non rationem sed relationem quantitativam designat; quae relatio etiam exprimi poterit per aequationem $q l = p w$, sive etiam aequatione $l = \frac{p}{q} w$, sive $w = \frac{q}{p} l$. Longitudo nempe et angulus sunt quantitates disparatae, quae proprio sensu aequiparari nequeunt; imo sensus hujus aequationis non alius est, quam is, qui ex dicta proportionem prodit, nempe: l esse in eadem ratione ad unitatem suam, in qua etiam angulus, quem continet, est ad unitatem angularem. Et potest quidem factor p et q quantumlibet parvus vel

magnus esse. Si ergo unitas angularis $\bar{1}$ sit e. gr. = dimidia conversioni s. 180 gradibus, erit longitudinis unitas, si ad eundem arcum pertinere debeat, = longitudini arcus ad angulum 180 graduum pertinenti. Si arcus, cujus longitudo est = $\bar{1}$, habeat angulum = $q \cdot \bar{1}$, erit generaliter $l \dots w = 1 \dots q$, ergo $w = lq$, atque $l = \frac{w}{q}$. Si contra arcus, cujus angulus = $\bar{1}$, habeat longitudinem = $p \cdot \bar{1}$, erit generaliter $l \dots w = p \dots 1$, ergo $l = pw$, atque $w = \frac{l}{p}$. E quibus duobus casibus composita est generalis assumptio, ut longitudo arcus sit $p \cdot \bar{1}$, angulus vero ejusdem = $q \cdot \bar{1}$; ubi, ut vidimus, est $l = \frac{p}{q} w$, atque $w = \frac{q}{p} l$. Atque $\frac{w}{l} = \frac{q}{p}$, et $\frac{l}{w} = \frac{p}{q}$. Fig. 26 hoc Fig. 26. illustrat pro $p = 2$ et $q = 3$. —

§. 86. Cum in circulo differentiae longitudinum et angulorum se habeant ut arcuum ipsorum longitudo et angulus (§. 76); quantumvis parvae vel magnae hae differentiae assumantur, erit ergo, si Δl et Δw has differentias designent, $\Delta l = \frac{p}{q} \Delta w$ et $\Delta w = \frac{q}{p} \Delta l$, sive $\frac{\Delta l}{\Delta w} = \frac{1}{w} = \frac{p}{q}$. Quare, si Δl statuatur esse = 0, erit quoque $\Delta w = 0$, cum p , et q , ideoque etiam $\frac{q}{p}$ et $\frac{p}{q}$ non sint = 0.

§. 87. Cum per omnem hanc utrinque infinitam lineam uni eidemque arcui, ubicunque is sumatur, competat angulus internus idem; arcubus vero duobus quibuscunque competant duo anguli, qui ad se invicem in eadem sunt ratione ac longitudo eorum; patet: inter arcus diversae longitudinis differentiam non intercedere aliam nisi magnitudinis, formae vero nullam. Si ergo e. gr. arcus rs , qui est minor arcu ab (fig. 27), ita arcui ab adplicetur, ut initiale punctum arcus ab fiat idem cum initiali puncto arcus rs , fieri potest, ut rs totus congruenter imponatur arcui ab , ita ut arcus ab excedat arcum rs arcu sb . Omnes ergo hujus curvae, iisdem unitatibus $\bar{1}$ et $\bar{1}$ eodem modo inter se conjunctis, descriptae arcus, quoad eam longitudinis partem, quam habent communem, congruunt, sunt ergo quoad formam plane identici, solaue longitudinis magnitudine aut iidem aut diversi. Itaque haec curva uniformis in se sibi ipsi plane similis, omnesque adeo ejus partes inter se et toti curvae plane similes. Quae interna circuli similitudo etiam per hoc illustratur: quemlibet ejusdem circuli arcum utrinque continuo per circulum congruenter moveri, atque ubique in circulo congruenter applicari posse. Et quia circuli longitudo utrinque continuo eodem modo flectitur, dici etiam potest: circulum esse lineam utrinque aequabiliter flexam, seu angulum flexus continuo eodem modo formatum. —

§. 88. Cum ergo haec curva utrinque eodem modo aequabiliter curvetur, nihil refert, utrum arcus ab consideretur a puncto a ad punctum b , aut viceversa a puncto b ad punctum a (fig. 28). Si igitur cuilibet circulari arcui subtendatur chorda, nempe recta aqb , erunt anguli, quos tangentes arcus cum chorda utrinque conficiunt, inter se aequales, quare etiam linearum tangentialium apotomae pb et pa inter se aequales. Si vero angulus arcus internus sit aequalis duobus rectis, erunt lineae tangentiales parallelae, adeoque lineae pb et pa in infinitum abeunt ad partem circuli convexam. Nisi

vero haec constructionis arcus positivae et negativae ab et ba adesset identitas: neque adesset generaliter et pro omnibus arcus partibus continua dictorum angulorum tangentialium ad chordam cum dictarum tangentialium apotomis aequalitas. Si ergo detur curva, in qua generaliter et continuo dictorum angulorum atque dictarum apotomarum adsit aequalitas, erit ea curva circulus; quae aequalitas, ubi generaliter et continuo non adest, curva uniformis sive circulus non erit.

Fig. 29.

§. 89. In punctis finalibus cujuslibet arcus ab (fig. 29) ducantur tangentiales rectae ap , bp , quae se intersecabunt puncto p ; si nunc angulus flexus arcus ab , nempe angulus w (§. 84), sit minor dimidia circumvolutione, hoc est $< 180^\circ$. Ducatur nunc recta am radialis ad tangentialem puncti initialis arcus ab , angulo quolibet α , itemque recta fb , radialis ad tangentialem puncti finalis arcus ab , ita ut ejus cum tangentiali pb angulus α' sit $= \alpha$: dico angulum duarum radialium internum amb esse angulo externo tangentialium w aequalem, hoc est aequalem angulo flexus arcus ab . Quia enim $\alpha + \gamma =$ duobus rectis, uti et $\alpha' + pbm (= \gamma')$, et $\alpha' = \alpha$ ex constructione, est ergo angulus $\gamma' + \alpha =$ duobus rectis. Jam omnium angulorum internorum quadranguli $apbm$ summa est $= 4$. rectis (§. 42). At cum summa angulorum $pbm + \alpha$ sit $= 2$ rectis, erit et angulorum $bma + apb$ summa $= 2$ rectis; cum vero etiam $w + apb = 2$ rectis, erit ergo angulus $amb =$ angulo w , qui (§. 73) exponit angulum flexus continui arcus ab . —

Notetur, lineas pb et bm esse ad lineas ap et am antiparallelas, esseque adeo $af \dots am = an \dots ap$; itemque lineas am et pb antiparallelas ad lineas af et fm , ideoque $af \dots fb = fm \dots fp$, quin et lineas af et fm antiparallelas ad lineas pn et an , adeoque $an \dots nb = pn \dots nm$.

Si ceteris manentibus $w + \alpha$ sint $= 2$ rectis, vel etiam > 2 rectis, erit bm aut $\parallel ap$, aut bm et ap se secant ad alteram partem concavam curvae; sed angulus amb nihilominus erit $=$ angulo w , iisdem argumentis.

Si haec constructio pro aequalibus angulis flexus w et arcubus, aequalibusque angulis α , repetatur, erunt omnes lineae homologae inter se aequales.

Fig. 30.

§. 90. Cum ejusdem anguli arcus, ubicunque in circulo sumantur, et forma et magnitudine iidem, hoc est, plane identici sint, sequitur, iisdem arcubus easdem subtendi chordas, ita ut in fig. 30, si arcus $ab = \alpha\beta$, itaque $< w = < v$ sit, et recta $ab =$ rectae $\alpha\beta$, itemque lineas apotomas tangentialium, atque earundem ad chordam angulos in quovis arcu sibi esse aequales, nempe $ap = pb$, et $< pba = < pab$; quin et in diversis arcubus aequalibus, ut in arcubus ab et $\alpha\beta$ esse $ap = \alpha\pi$, $pb = \pi\beta$, et $< pba = < \pi\beta\alpha$, et $< pab = < \pi\alpha\beta$.

§. 91. Si per quaelibet puncta arcus cujuslibet ducantur per puncta taetus tangentialium lineae normiales (§. 44) ibi perpendiculares, dico duas quaslibet harum normalium se ad partem curvae concavam secare ita, ut normales finitae, seu normalium apotomae inde ortae sint aequales, angulusque sectionis earum sit aequalis angulo w , quem arcus intra dicta duo puncta tangentialia interceptus continet, atque anguli normalium cum chorda arcus etiam aequales.

Fig. 28.

Nam cum lineae ap et pb (fig. 28) tangunt curvam punctis a et b , erit ergo $< pAM =$ recto $= R$, itemque $< pbM = R$. Jam cum tangentiales ap et pb se secant sub angulo w , sequitur, normales aM et bM se secare ad oppositam partem e regione puncti β , hoc est ad partem curvae concavam. Ex praecedente autem theoremate (§. 89) demonstratur, angulum w' esse $=$ angulo w . Jam cum $< pab = <$

pba , et $\sphericalangle p a M = p b M (= R)$: est quoque $\sphericalangle Mab = \sphericalangle Mba$, ideoque et linea $aM = bM$.

Cum ergo angulus aMb sit $= \sphericalangle w$, qui exponit angulum flexûs continuum, quem arcus ab complectitur: ergo hic idem angulus flexûs exponitur pro quovis arcu per angulum normalium aMb . Quodsi ergo (fig. 30) duorum quorumlibet ab et $\alpha\beta$ anguli tangentiales seu flexûs sint w et v , anguli vero normales aMb et $\alpha M\beta$, erit $w \dots v = aMb \dots \alpha M\beta$. —

Fig. 30.

§. 92. Si (fig. 28) jungantur puncta sectionis tangentialium et sectionis normalium lineâ rectâ kl , dico, eandem kl bisecare et angulum tangentialium apb et angulum normalium aMb , uti et chordam, in qua est perpendicularis. Nam cum $pb = pa$ (§. 88), et $bM = Ma$, triangula $p b M$ et $p a M$ congruunt. Et cum $\sphericalangle pab = \sphericalangle pba$ (§. 89); et quia $\sphericalangle b q M = 2 R - \sphericalangle p q b = 2 R - \sphericalangle p q a$ etiam $\sphericalangle b p q = \sphericalangle a q p$, lineaque $pb = pa$ (§. 88); est etiam $\triangle b p q = \triangle a p q$; indeque $bq = aq$, atque $\sphericalangle a q p = \sphericalangle b q p$, qui, cum sint in una eademque recta, nempe chordâ, deinceps positi, erunt recti.

Fig. 28.

Jam vero cum hoc theorema de uniformitate curvae unice dependeat, ut sublata hac uniformitate ipsum tollatur, sequitur etiam hoc theorema, ut omnia de uniformitate curvaturae unice dependentia, etiam valere conversum; neque valere de ulla versicurve linea.—

§. 93. Curva uniformis infinitis vicibus in initiale punctum ubicunque id in ipsa sumatur, revertitur, idque ita, ut tangens curvae in puncto initiali congruat cum tangente in puncto conversionis totius, ubi arcus continet angulum $= 4 R$ sive 360° .

Nam sumatur (fig. 31) arcus abc is, qui dimidia conversionis angulum $= 2 R$ complectitur, sive cujus angulus internus est $= 2 R = 180^\circ$; ergo ejus tangentialis linea pq facit cum directione initiali RR' angulum latentem 180 graduum; proinde linea pq est $\parallel$ ad lineam RR' . Ducatur arcus abc chorda ac ; dein curva a puncto c continuo prolongetur, usque dum denuo angulum continuum $= 2 R = 180^\circ$ descripserit: dico, hujus arcus cda' punctum finale coincidere cum puncto initiali a sive J : nam hujus arcus chorda cum chorda arcus abc congruit, cum angulus pca atque angulus qca sit angulus rectus, idque ad eandem lineam rectam tangentialem pcq ; jam vero cum aequalibus angulis aequales chordae subtendantur (§. 90), chorda arcus abc est $=$ chordae anguli cda' , hoc est: recta $ac =$ rectae ca' ; cum ergo hae duae congruentes chordae unum punctum extremum, nempe c , commune habeant, etiam alterum eorum punctum extremum commune habent, ergo punctum a' incidit in punctum a ; et cum angulus Rac et angulus caR' sint uterque rectus, idque ad idem punctum cruris communis ac , sequitur, lineas tangentes Ra et aR' coincidere, ideoque curvam in punctum initiale a reversam etiam in eandem directionem RR' rediisse, de qua exierat. Quare linea uniformiter curva in omnibus punctis suis infinite multis circuitibus secum ipsa congruit, se ipsam quasi penetrans et persequens, ambiens et quasi quaerens; idque ubivis sub angulo integro totius conversionis seu 360 graduum, qui ad directionem fundamentalem relatus et hypostatice spectatus iterum est $= 0$; atque ita, ut longitudo curvae a puncto initii J versus unam plagam in infinitum continuatae non sit major quam $\frac{\infty}{2}$ (§. 14 coll. §. 26), cum eadem longitudo infinita inde ab a versus alteram plagam etiam sit $= \frac{\infty}{2}$; igitur haec duo infinita brachia $abc \dots$ et $adc \dots$ sint $= \frac{\infty}{2}$ et $\frac{\infty}{2} = \infty$. Si igitur sit arcus $abc = + l =$ arcui anguli $+ 180^\circ$, itemque arcus adc

$= - l =$ arcui anguli $- 180^\circ$, hi arcus in eodem puncto conveniunt, atque deinde ulterius prolongati in vestigia ipsorum redeunt, inverso ordine punctorum; at post angulum 360° utrumque brachium in propria vestigia directo ordine redeunt. —

Cum vero linea uniformiter curva in se ipsam in omnibus punctis suis revertatur, ergo, individualiter definitis unitatibus $\bar{1}$ et $\dot{1}$, arcui unius totius conversionis s. 360 graduum competit definita longitudo. Unde, si haec curva hypostatice in spatio consideretur, ea in se rotunda, clausa ac perfecta est, definita longitudine angulum 360 graduum continens. —

Unde simul sequitur, omnem rectam lineam in eodem cum circulo plano, ad circumlum non tangentialem, si habeat cum eodem punctum unicum aliquod commune, ideoque circumlum secet, (quia recta in se considerata est $= \frac{\infty}{2}$ et $\frac{\infty}{2} = \infty$ (§. 26), secare etiam circumlum in altero definito puncto, esseque adeo curvae uniformis definitam chordam.

§. 94. In curva uniformi omnium arcuum et contiguorum et non contiguorum lineae normiales, quae tangentibus in puncto tactus perpendiculares sunt, se intersecant in uno eodemque puncto, omnesque chordae omnium arcuum quorum angulus $= 180^\circ$ se in eodem dicto puncto bisecant.

Fig. 32.

Nam si fuerint (fig. 32) arcus ab et bc contigui, caeterum magnitudinis ratione arbitraria, prolongatis ergo lineis normalibus usque dum curvam secant in punctis a' , b' , c' , erit arcus $aba' = 180^\circ$ uti et arcus bcb' , ac arcus cac' , quia (ob 73 et 74) angulus $la'a$ est $=$ angulo $Raa' = 80^\circ$, similiterque tangentes in b' et c' insistent chordis suis perpendiculariter. Et cum omnes arcus $= 180^\circ$ sint inter se aequales, sequitur $aba' = ba'b'$; ergo si utrinque arcus ba' detrahatur, erit arcus $ab =$ arcui $a'b'$, itaque (§. 73) $aM = Ma'$, et $bM = Mb'$; ergo cum et $aM = bM$ atque $a'M = Mb'$ (quia anguli ad chordam sunt aequales, §. 92), erunt omnes hae normales aM , bM , $a'M$, $b'M$ inter se aequales, adeoque M bisecat chordam aa' et bb' . Pariter demonstratur, esse $bM = cM = b'M = c'M$, et similiter de arcubus omnibus deinceps positis. Sin vero etiam considerentur duo quilibet arcus non contigui, idem nihilo minus probatur; nam si e. gr. spectetur arcus de , demonstratur, chordas dd' et ee' inter se aequales per punctum unum M' dimidiari; si deinde hic arcus referatur ad alium uti ad ba , cum hoc conjungitur definito arcu bd , de cujus chordis idem probatur; ergo puncta M' et M coincidunt.

Fig. 33.

Hoc theorema probatur etiam alia via. Sumantur (fig. 33) arcus deinceps positi ab , bc , $cd \dots$ cujuslibet magnitudinis, sed inter se longitudine aequales; ductis igitur tangentialibus ap , bp' , cp'' , atque normalibus am , bm , et bm' , cm' , et cm'' , dm'' ; per propositionem §. 92 erunt $am = bm$, $bm' = cm'$, $cm'' = dm''$. Sed cum $ab =$ arcui bc , erit (§. 92) etiam $bm = bm'$, itemque bm et $bm' = cm''$; igitur puncta m , m' , $m'' \dots$ coincidunt. Jam si arcus ab sit pars aliquota arcus totius conversionis, v. gr. ut in fig. 34 pars ejus sexta, debet ergo (§. 43) partis sextae extremae normalis cum normali primae sextae partis congruere. Sin autem arcus ab sit totius circumvolutionis pars rationalis superpartiens z — tas (denotante z omnem numerum integrum), tunc saltem post z revolutiones punctum ultimi arcus $= ab$ congruet cum puncto initiali. Quod si ab ad arcum totius revolutionis sit irrationalis, nullus unquam ex arcu-

Fig. 34.

bus = ab deinceps positus, puncto suo finali coincidit cum puncto initiali, sed tamen sine fine ad hanc coincidentiam accedet; (quod e theoria irrationalium elucet) *) —. Quin etiam directe ex propositione ni 89 hoc theorema adstruitur; quia ibi facto angulo a et $a' = R$, am fit = bm , $bm = cm'$, $cm' = dm''$, ... et puncta m, m', m'' . . . in unum punctum coincidunt.

Ergo pro quavis curva uniformi datur ad partem concavam ejusdem punctum in eodem plano, cui curva tota inest, unicum, quod ab omnibus curvae punctis aequè distat, ideoque punctum per eminentiam ($\kappa\epsilon\nu\tau\rho\nu$) s. centrum vocatur.

Omnes vero lineae rectae in curvam e centro ductae in eandem perpendiculariter directae sunt, quia in puncti sectionis tangentialem perpendiculariter insistent, et vocantur radii per eminentiam, eorumque duplum, siue omnis chorda 180 graduum vocatur diameter, et radius ipse, hoc respectu, semidiameter. Ambitus vero curvae unus, seu arcus 360° graduum vocatur peripheria per eminentiam; nam haec nomina: centrum, radius, diameter, peripheria sunt proprie longe generaliora, infinite multis curvis communia.

In sequentibus brevitatis gratia radius vocatur r , diameter d ; longitudo arcus 180° π , longitudo arcus 90° $\frac{\pi}{2}$, peripheriae totius longitudo 2π .

§. 95. Circuli centrum est quidem unicum in circuli plano, neque tamen in spatio. Nam erectâ super planum, cui circulus inest, rectâ in centrum perpendiculari Mtt' (fig. 35), quodvis hujus lineae punctum p aut p' , cis et trans circuli planum sumptum, ita ut unicum illud punctum quod in plano circuli est, relatum ad omnia circuli abc $a'b'c'$ puncta, ab omnibus aequè distat. Ductis enim chordis diametris aa' , bb' , cc' , . . . erunt omnes radii aequales, ergo etiam omnes lineae ap , bp , cp inter se aequales, uti et lineae $a'p'$, $b'p'$, $c'p'$ inter se. Ergo linea uniformiter curva poterit etiam ita definiri, ut sit linea curva, cujus omnia puncta a quovis puncto lineae rectae per planum curvae in ejus centro perpendiculariter transeuntis aequaliter distent, ita quidem, ut haec distantia continuo crescat, quanto magis illud punctum rectae in plano perpendicularis a plano recedat.

§. 96. Per tria quaelibet puncta in plano, quae non sunt in eadem recta, nonnisi unus circulus transit. Nam conjungantur (fig. 36) haec tria puncta a, b, c per rectas ab, ac , per quarum puncta dimidiantia m et m' transeant lineae duo perpendiculares, se secantes in puncto M , quod (§. 94) erit centrum circuli transeuntis per puncta a, b, c ; et erit ab chorda anguli aMb , atque bc chorda anguli bMc , atque ac chorda anguli aMc . Alius vero circulus per eadem puncta transire non potest, quia definito centro et radio totus circulus individualiter definitus est, et definitis longitudine et positione lineis ab, ac , nonnisi duae lineae in mediis eorundem punctis dantur.

Ergo circulus est locus geometricus omnium triangulorum, et potest quodvis triangulum et inscribi et circumscribi.

§. 97. Magnitudo longitudinis cujusvis arcus circuli definitur per unitatem longitudinarem et angularem, atque eo, cuinam multiplo unitatis longitudinalis multipulum certum unitatis angularis jungatur (§. 78, §. 82): his ergo definitis, si et detur in spatio planum definitum, atque in hoc plano punctum initiale J et directio initialis RR' , per haec circulus unus in infinito spatio individualiter definitur et positione et magnitudine;

*) Videatur analogia centricitatis polygonorum regularium demonstratio, antea N. 43 exhibita.

ergo his definitis definiuntur quoque quaevis peripheriae duo puncta peripheriam dimidiantia, per quae normalis in tangentes horum punctorum ut circuli diameter transit, in cujus medio centrum est. Et cum in circulo angulorum arcuum ratio eadem sit ratio et longitudinum iisdem arcubus competentium, sequitur: in omni circulo, utut peripheria sit magna parvave, quibilibet arcubus ad eosdem angulos pertinentibus eandem competere longitudinum rationem.

Fig. 37.

§. 98. Cum ergo omnes circuli inter se similes sint, sequitur hinc inde: etiam omnes lineas homologas rectas in diversis circulis eandem inter se rationem habere. Si igitur sumantur in diversis circulis duo arcus eundem angulum inter se comprehendentes, et pro utroque arcu describantur (fig. 37) lineae tangentiales, earumque normales in punctis a, p, b , et α, π, β : erunt omnia homologa triangula in duobus his circulis inter se similia; ideoque omnes etiam lineae rectae homologae in omnibus his triangulis eandem habebunt rationem.

Nam cum angulus w ex hypothesi sit = angulo w' , ergo erunt $\angle aMb = w$, et $\angle \alpha M \beta = w'$ etiam aequales, ideoque et reliqui homologi anguli omnes aequales. Ergo in duobus quibuscumque circulis arcus homologi, diametri, semidiametri, chordaeque, omnesque ad utrosque homologice positae lineae rectae, eandem inter se habent relationem; quare etiam radii ratio ad peripheriam totam, uti ad arcum quemlibet definiti anguli in omnibus circulis eadem est.

Jam cum omnis circulus longitudine et angulo infinitus sit, et inde a valore = 0 continuo omnes rationes percurrat, diameter vero et semidiameter in omni circulo ad quemlibet definiti anguli arcum definitam habeat rationem; ergo in quovis circulo datur arcus unus, isque in omnibus circulis eundem angulum definitum complectens, qui longitudine aequalis est radio; ejusque duplus diametro. Vocetur ergo arcus, cujus longitudo aequalis est radio Lr , ejusque angulus ang. r seu $\angle r$: Ergo ang. r erit in quovis circulo definitum multipulum ejus unitatis angularis $\bar{1}$, quae pro quovis circulo construendo arbitrario assumpta est. Sed ang. r hypostaticè in quovis circulo est definita pars conversionis totius, per cujus gradus, partesque minutas, secundas, et quae sequuntur, ergo exprimetur, et signetur per u^0 ; unitas vero angularis $\bar{1}$, quaecumque ea sit, exprimi poterit etiam per conversionis totius partes et subpartes, et tunc signabitur (coll. §. 32 et §. 38) per $\bar{1}^0$. Definita igitur unitate angulari $\bar{1}$ pro circulo aliquo construendo, habebit angulus hypostaticus ejus arcus, cujus longitudo est = r , definitam rationem ad unitatem angularem; quae pro mutanda $\bar{1}$ mutabilis ratio exponetur per $\frac{\text{ang. } r}{\bar{1}^0}$, sive $\frac{u^0}{\bar{1}^0}$, quam brevitatis causa in sequentibus semper designabimus per ϵ . Haec ergo ratio: $\epsilon = \frac{\text{ang. } r}{\bar{1}^0}$ sive $\frac{u^0}{\bar{1}^0}$ crescit decrescente $\bar{1}$, decrescitque crescente $\bar{1}$; pro

$\bar{1}^0 = 0$, ϵ est = ∞ , pro $\bar{1} = \infty$, ϵ est = 0. Eadem relatio est cuivis alii arcuali angulo W (§. 84), cujus per $\bar{1}^0$ expressio $\frac{W^0}{\bar{1}^0}$ cum $\bar{1}^0$ reciproce crescit et decrescit.

Jam ergo, si $\bar{1}^0$ sit = ang. $r = u^0$, erit $\epsilon = 1$. Si ergo pro circulo construendo accepta sit (§. 81) expressio $l = \frac{p}{q} w$, ea erit vera pro quovis arcu, ita ut ejus lon-

gītudo ad $p \cdot \bar{1}$, uti est ejus angulus ad $q \cdot \bar{1}$: quare etiam in quovis circulo per dictam expressionem definitum est, quale multipulum radius r sit de unitate longitudinali; ergo est $r = \frac{p}{q} \times \text{ang. } r = \frac{p}{q} u^o$. Quod si ergo ponatur $u^o = \bar{1}$, quod semper fieri

potest (quia $\bar{1}$ arbitrariā est magnitudine (§. 32)) erit $r = \frac{p}{q}$. Hoc etiam ita probatur.

Si in aequatione $l = \frac{p}{q} w$, w ponitur $= 1$, hoc est, si quaeratur longitudo arcus

ejus, cujus angulus est aequalis $\bar{1}$, tunc posito $w = 1$, l est $= \frac{p}{q}$. Si ergo hic angu-

lus $w = \bar{1}$ simul assumatur is esse, cujus arcus longitudo sit radio aequalis: tunc erit

$l = r = \frac{p}{q}$. Quod si loco $\frac{p}{q}$ utamur, sicuti fieri solet, expressione simpliciore a ,

ita ut generaliter sit pro circulo expressio functionalis originaria $l = aw$, et sumatur

$u^o = \text{ang. } r = \bar{1}$, erit $r = a$. —

§. 99. Cum in omni circulo sit $l = \frac{p}{q} w$, invenietur arcus, ad quem pertinet unitas

longitudinalis $\bar{1}$, si ponatur $l = 1$. Nam pro $1 = \frac{p}{q} w$ invenietur $w = \frac{q}{p}$; ergo is ar-

cus, cujus angulus est $= \frac{q}{p} \cdot \bar{1}$, habet longitudinem $= \bar{1}$. Si nunc sit $\bar{1} = u^o =$

$\text{ang. } r$, $\left(r = \frac{p}{q} \cdot \bar{1}\right)$ ergo hoc casu erit $\bar{1} = \frac{q}{p} r = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q} = 1$, sive $\frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Quod etiam sic elucet. Si angulus $r = u^o$ sit $= \bar{1}$, ad angulum $\bar{1}$ pertinet longitudo

radii $= \frac{p}{q}$; quare est $\frac{p}{q} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \frac{q}{p}$; ergo arcus, cujus angulus est $= \frac{q}{p}$ hoc

casu est is, cujus longitudo est $= \bar{1}$; itaque $\bar{1}$ hoc casu invenietur, si sumatur radii

multiphum $\frac{q}{p}$. —

§. 100. Cum radius habeat in omnibus circulis ad omnium arcuum definitorum lon-

gitudines, et generatim ad omnes lineas homologas easdem definitas rationes, ergo etiam

unam in omnibus circulis definitam rationem ad peripheriam: sequitur, individualiter de-

finito radio, unum totum circulum individualiter determinari. Si vero radii magnitudo

in aequationem circuli originariam $l = \frac{p}{q} w$, sive $l = aw$, inferri debeat, hoc fieri

potest, si r consideretur ut longitudo arcus illius, quae ipsi est aequalis, et signatur

per arcus ang. r . Sed quatenam magnitudo relativa, s. quatenam quotitas (Vielheit) in

circulo quolibet individualiter definito atque analytice (methodo originaria) expresso ad-

scribatur arcui cuilibet, ergo et arcui ang. r , id de unitatibus $\bar{1}$ et $\bar{1}$, et de eo de-

pendet, quibusnam arcibus $\bar{1}$ et $\bar{1}$ adscribantur (§. 78 et §. 80). Ex aequatione $l = \frac{p}{q} w$

generaliter, ut vidimus, fit arcus ang. $r = \frac{p}{q} \text{ ang. } r = \frac{p}{q} u^o$. Quod si ergo

ang. $r = u^o$ sit $= \bar{1}$: est arc. ang. $r = r = \frac{p}{q}$. Jam vero, si $\bar{1}$ non sit ang. $r = u^o$,

sed $\frac{s}{n}$ ang. r seu $\frac{s}{n} u^o$, erit ergo ang. $r \dots \frac{s}{n}$ ang. $r = r \dots \frac{p}{q}$, ergo $r = \frac{n}{s} \cdot \frac{p}{q}$.

E. gr. si $\bar{1}$ sit 30^o , habetur $30^o = \frac{s}{n} u^o$, proinde $\frac{30^o}{u^o} = \frac{s}{n}$ sive $\frac{u^o}{30^o} = \frac{n}{s}$, et ang.

$$r = u^o = \frac{n \cdot \bar{1}^o}{s}; \text{ ergo } r = \frac{u^o}{30^o} \cdot \frac{p}{q}.$$

Jam si brevitatis causa rationem $\frac{u^o}{\bar{1}^o}$, hoc est angulum arcus, cujus longitudo est $=$ radio, divisum per unitatem angularem, utrisque per gradus peripheriae expressis, designemus, uti jam statuimus (§. 98), constanter litera ϵ , erit in quovis circulo generaliter radius $= \frac{\epsilon p}{q}$. Ubi si u^o ponatur $= \bar{1}$, ergo $u^o = \bar{1}^o$, ϵ fit $= 1$, atque radius $= \frac{p}{q}$, unitasque longitudinalis $= \frac{q}{p}$. radius; et si simul $\frac{p}{q} = \bar{1}$, hoc est, si $p = q$, erit radius $= \bar{1}$, habeturque aequatio $l = w$ simplicissima, de qua exivimus (§. 85). Et si loco $\frac{p}{q}$, ut fieri solet, scribatur a , pro quovis circulo radius est $= \epsilon a$; pro $\bar{1} = u^o$ vero $r = a$, et $\bar{1} = \frac{r}{a}$; et pro $a = 1$ erit $r = \bar{1}$, uti adhuc in Geometria tacito subintelligi solet.

Fig. 38.

§. 101. Circuli magnitudo unice dependet de magnitudine unitatis longitudinalis, conjuncta cum eadem non mutata unitate angulari. Circulus igitur abc (fig. 38), cujus unitas longitudinalis, cum eodem definito multiplo unitatis angularis conjuncta, est duplum unitatis longitudinalis assumptae pro circulo ABC cum eadem unitate angulari, dabit arcus ejusdem anguli cujuslibet dupliciter longos; itaque (§. 98) et diametri horum circulorum et radii et peripheriae erunt in ratione $2 \dots 1$, itemque omnes eorundem lineae rectae homologae (§. 98). Et generaliter, si manente $\bar{1}$, circulorum duorum unitates longitudinales $\bar{1}$ et $\bar{1}'$ sint ut $m \dots n$, erunt etiam omnes arcus, chordae, lineaeque rectae, si homologice in ambobus circulis constituentur, inter se ut $m \dots n$.

§. 102. Jam vero, cum curva dicatur magis curva esse, quae pro eodem angulo flexus minorem longitudinem habeat, quam alia curva pro eodem angulo (§. 20): dicetur etiam circulus eo magis curvus esse, quanto minorem longitudinem habet arcus pro eodem flexus angulo. Et cum in duobus circulis ejusdem unitatis angularis, sed diversae unitatis longitudinalis, ejusdem anguli arcus, ut modo demonstratum est, se habeant directe ut unitates longitudinales: sequitur, magnitudinem curvitatibus circuli pro eodem angulo esse in ratione inversa seu reciproca magnitudinis arcuum similium, sive, quae eadem est ratio, unitatum longitudinalium, si nimirum unitates longitudinales in utroque circulo ad eundem angulum pertineant.

Fig. 39.

§. 103. Si contra, unitate longitudinali manente pro duobus circulis, ex aequatione eadem definiendis, unitas angularis, quae ad eandem in ambobus circulis arcus longitudinem pertineat, sit diversa, tunc arcuum chordarumque similium magnitudo unice dependet de unitatis angularis diversitate. Ut, si unius circuli abc unitas angularis se habeat ad unitatem angularem ulterius cujusvis circuli ABC (fig. 39), ut $2 \dots 1$; ergo arcus definitae longitudinis abc pertinebit in suo circulo ad angulum flexus dimidium ac arcus ABC aequae longus in altero circulo. Itaque, si sumantur anguli arcuum duorum

aequales, horum arcuum longitudo erit inverse ut 2 .. 1 (fig. 38). Quare curvitas esse dicetur generaliter in ratione directa angulorum pro arcubus longitudine aequaliter magnis. —

§. 104. Si vero in duobus circulis et angulares et longitudinales unitates eadem sint, ratio curvitis, quae vocetur $C \dots c$, pro circulis ABC et abc , composita erit ex directa ratione angulorum atque inversa seu reciproca ratione longitudinum arcuum. Si ergo ratio longitudinis duorum arcuum sit $M \dots m$, et ratio angulorum eorundem $\Theta \dots \vartheta$, erit curvatura prioris circuli ABC ad posterioris abc curvaturam ut $\Theta m \dots \vartheta M$. Et cum pro arcubus iisdem curvatura sit in ratione inversa longitudinis arcuum seu chordarum similium, ergo etiam in ratione inversa radiorum aut diametrorum (§. 98), et cum sit, ut modo ostensum est, ratio curvaturae ut $\Theta m \dots \vartheta M$, erit quoque diametrorum aut radiorum circulorum ABC et abc ratio $D \dots d = R \dots r = \vartheta M \dots \Theta m$. Ex gratia, si fuerit longitudo arcuum $AB \dots ab = 2 \dots 3$ (fig. 40) et anguli $\Theta \dots \vartheta = 1 \dots 3$, erit ergo $C \dots c =$ rationi, quae componitur ex directa ratione 1 .. 3 et ex reciproca rationis 2 .. 3, quae est 3 .. 2; ergo $C \dots c$ erit $= 1 \cdot 3 \dots 2 \cdot 3 = 1 \dots 2$; et radii $R \dots r$, quin et diametri $D \dots d$, erunt $= AC \dots ac = 2 \dots 1$. Fig. 40.

§. 105. Si ergo detur ratio radiorum $R \dots r = c \dots C$ et ratio longitudinis duorum arcuum circulorum duorum $ABC \dots abc = M \dots m$, erit ratio angulorum Θ et ϑ in circulis ABC et abc ad dictos arcus pertinentium composita ex ratione inversa radiorum et directa longitudinum, hoc est $\Theta \dots \vartheta = rM \dots Rm$ (unde sequitur retro $R \dots r = M\vartheta \dots m\Theta$). Et contra data ratione radiorum et ratione angulorum, erit ratio longitudinum arcuum $M \dots m = R\Theta \dots r\vartheta = c\Theta \dots C\vartheta$ (unde quoque sequitur, retro concludendo $R \dots r = M\vartheta \dots m\Theta$).

§. 106. Si in circulo quolibet quilibet arcus acb (fig. 41) dividatur in duas partes contiguas ac , cb , secundum quamlibet rationem, erit angulus formatus a partium ac , cb chordis, ut angulus acb , semper idem. Nam si, ductis tangentibus in punctis a , c , b , manente arcu ab semper eodem, punctum variabile c procedat inde a puncto a continuo usque ad punctum b , arcus ab continuo secabitur in duas partes ac et cb , secundum omnes rationes possibilis inde ab $o \dots ab$ usque ad $ab \dots o$. Est vero angulus flexus gfb arcus ab aequalis summae angulorum flexus duorum arcuum ipsum arcum ab secundum quamvis rationem integrantium (§. 74) ac et cb ; ergo manente arcu ab summa angulorum $\angle feh + \angle hdb$ eadem manet (id quod generaliter de omni omnis generis curvâ valet). Ducantur nunc radii in tria puncta a , c , b ; ergo anguli quatuor eam , ecm , dcm et dbm sunt omnes recti. Sed anguli duo ad chordam ac , nempe anguli inter se aequales $\angle eac$ et $\angle eca$ sunt simul sumpti aequales angulo tangentiali fec ; pariterque anguli duo ad chordam cb inter se aequales $\angle dcb$ et $\angle dbc$ sunt simul sumpti aequales angulo tangentiali hdb . Cum ergo horum duorum angulorum tangentialium summa, nempe $\angle fed + \angle hdb$, semper eadem sit $= \angle gfd$: erit etiam summa quatuor angulorum tangentialium ad chordas, nempe $\angle eac + \angle eca + \angle dcb + \angle dbc$, semper eadem, ubiubi punctum c sit in arcu ab . Fig. 41.

Jam si a summa quatuor rectorum $\angle eam + \angle ecm + \angle dcm + \angle dbm$, subtrahatur summa constans angulorum ad chordas, nempe $\angle eac + \angle eca + \angle dcb + \angle dbc$: erit summa quatuor angulorum $\angle cam + \angle acm + \angle bcm + \angle cbm$ quoque constans, hoc est $= 4 \cdot 90^\circ - \angle fed - \angle hdb = 360^\circ - \angle gfb = 360^\circ - \angle amb$ (§. 89). Sed cum $\angle cam = \angle acm$ (§. 88), uti et $\angle bcm = \angle cbm$, erit $\angle acb = \frac{1}{2} (\angle acm + \angle cam + \angle bcm + \angle cbm) = \frac{1}{2} (360^\circ - \angle gfb)$

$= 180^\circ - \frac{1}{2} \angle gfb$, sive $= 180^\circ - \frac{1}{2} \angle amb$. Et cum angulus ad centrum externus $\angle bma$, hoc est angulus flexus arcus bna sit $= 360^\circ - \angle gfb$: sequitur, angulum chordarum s. periphericum acb esse dimidium anguli arcus, cui insistit, sive dimidium anguli bma externi ad centrum.

Quod etiam demonstratur missis angulis tangentium ad chordas. Nam cum (§. 89) angulus quivis tangentialis seu flexus sit aequalis angulo suo centrali; ergo $\angle fec = \angle amc$ et $\angle hdb = \angle cmb$, itemque $\angle gfb = \angle amb$. Jam cum in triangulis acm et cmb anguli superni duo cum suo angulo ad centrum sint $= 180^\circ$, sequitur esse quatuor angulos $\angle cam + \angle acm + \angle bcm + \angle cbm = 2 \cdot 180^\circ - \angle amb$, ergo esse eorum dimidium, nempe angulum $acb = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle amb$; sed angulus ad centrum respectu anguli acb externus bma (qui pertinet ad arcum bna) cum angulo amb conficit $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$; ergo $\angle acb$ est quoque aequalis dimidio anguli ad centrum externi, hoc est $= \frac{1}{2} \angle bma$.

Hae demonstrationes, uti omnes, quaecunque ex rei alicujus originaria theoria sequuntur, hoc commodi habent, ut rem ipsam totam et integram declarent, neque opus habeant, ut diversi casus singulares omnes totam theorematis constructionem integrantes distincte tractentur, quorum deinde quivis exigit, ut separatâ probetur demonstratione. Cum vero *Euclides*, et hucusque omnes, quos equidem novi, Mathematici circulum non ex sua propria definitione, sed ope centri et radiorum considerarent, ideo et hujus theorematis demonstratio originaria eos effugere debuit, ita ut ad hoc theorema adstruendum discernptionem ejus in casus integrantes evitare non potuerint. *)

In demonstrationibus nostris simul elucet, quomodo haec circuli proprietas fluat e curvitalis uniformitate; nempe exinde, quod anguli tangentiales ad chordam sunt inter se aequales. Nam quamvis in demonstratione altera ad horum angularum aequalitatem non directe et immediate respiciatur; mediate tamen hoc nihilominus fit, quia anguli centralis cum angulo flexus aequalitas inde antea (§. 89) demonstrata fuit.

§. 107. Omnis ergo angulus, positione mutabilis, insistens super arcu quolibet circuli, seu super ejus chorda, cujusque apex est in peripheria, est dimidius ejus anguli, constantis positione, qui super eodem arcu sive super eadem chorda insistit, cujusque apex in centro est. Sive brevius: In omni circulo omnis angulus periphericus est dimidium anguli sui centralis. (Fig. 42).

Fig. 42.

Simul etiam sequitur, in triangulis acd et $dc'b$ etiam angulos δ et δ' inter se aequales esse, imo et angulos externos eaf et gbh , ubiubi c in peripheria sit.

Si ergo angulus centralis fuerit angulus latens 180 graduum, angulus periphericus erit rectus; hoc est: angulus omnium chordarum diametro aequalium periphericus est rectus; sive etiam: angulus omnis, quem includunt chordae, quibus subtenditur diameter, rectus est in circulo.

*) Habetur ea in *Euclidis* elementorum L. III. p. 20 s., quam post *Euclidem* secuti sunt omnes. Cum in *Euclidis* elementis, ceterum, sed aliis de causis, praestantissimis, maxima demonstrationum pars sit non solum inductiva, sed simul apagogica: haec elementa non esse quoad methodum genuina, vereque organica, intelligent omnes, qui sciunt, demonstrationes vere scientificas et originarias esse debere totales atque directas. —

§. 108. Summa duorum angulorum periphericorum, quorum chordae totum integrant circulum aequatur duobus rectis; quia eorundem anguli centrales simul sumpti aequales $2 \cdot 180^\circ$ gradibus s. toti conversioni.

Si ergo in circulo inscribatur figura rectilinea quadrangularis, in ea angulorum internorum sibi oppositorum summa erit $= 180^\circ$. Quae si debeat habere unum angulum rectum, hujus anguli subtensa erit diameter circuli; si duo, horum duorum subtensae erunt circuli diametri; si tres rectos, ergo et quatuor, ergo omnium angulorum subtensae erunt diametri. —

Quare circulus est locus geometricus quadrangulorum omnium, quorum anguli interni oppositi sunt duobus angulis rectis aequales; ideoque et circulus ejusmodi quadrangulo, et ejusmodi quadrangulum circulo possunt et circumscribi et inscribi; quae res eadem methodo absolvitur, ac circumscriptio et inscriptio trianguli (§. 96). Nam dato quadrangulo $abcd$, sumatur aut $\triangle abc$ aut $\triangle bcd$, aut $\triangle cda$, aut denique $\triangle dab$; et inventa solutio etiam comprehendet punctum quadranguli quartum; quia quaesitum jam per triangulum datum plene determinatur. —

§. 109. Si sumatur (fig. 43) punctum extra circulum e , et ducantur ex hoc puncto lineae rectae ea et ec , quae circulum transeant, poterit angulus dictarum linearum ad punctum dictum e exprimi per angulos in circulo. Nam ducta linea cb , quae puncta sectionis circuli per lineas ex e demissas anomologa conjungat, erit angulus periphericus $abc = \frac{aMc}{2}$, et angulus periphericus $bcd = \frac{bMd}{2}$. Fig. 43.

Sed angulus extra circulum, ϵ , est $= \angle abc - \angle bcd$, ergo $\epsilon = \frac{aMc}{2} - \frac{bMd}{2}$; hoc est dimidium differentiae angulorum, quos arcus duo a cruribus anguli extra circulum ϵ intercepti continent. Pro quo etiam dici poterit, angulum ϵ esse dimidium differentiae angulorum periphericorum abc et bcd ; pro quibus etiam anguli peripherici, quorum apices sunt extra lineas ea et ec assumi possunt, uti anguli $ab'c$ et $b'cd$. Quare propositionis veritas etiam obtinet, si una linearum ea , aut ec circulum tangat, ut in figura 44 factum est. Fig. 44.

Si (Fig. 43) arcus db et db sint aequales, erit angulus ϵ aequalis $\angle \epsilon'$, et $\triangle ae'b \cong \triangle cbe$, ergo $ab \dots bc = be' \dots be$; indeque etiam $\triangle bac \cong \triangle bee$, adeoque $ac \dots ee = ab \dots be' = cb \dots be = ae' \dots ce$.

§. 110. Angulus α tangentis et chordae (fig. 45) aequatur angulo peripherico μ sive β chordae. Fig. 45.

Nam demissa e centro perpendiculari Mf in chordam erit (§. 92) $\gamma = \delta$, ergo (§. 107) $\gamma = \beta$. Sed cum et ϕ , ergo et $\epsilon \perp \gamma$ et $\alpha \perp \epsilon = 90^\circ$, erit $\alpha = \gamma = \beta$.

§. 111. In discussione circuli completiori hoc loco considerari debet relatio linearum rectarum ad circulum; aut unius lineae rectae, aut duarum, aut plurium, et generaliter z numero linearum, earumque secundum omnes relationes, quas simul lineae rectae inter se habent; cujus rei hic casus praecipui tantum evolvantur, cum hujus tractationis scopus non sit completa circuli theoria, sed tantum hujus completae theoriae fundamenta atque initia secundum methodum curvas considerandi originariam eamque vere scientificam.

§. 112. Linea recta aut est tota extra circulum, aut circulum tangit, aut eundem secatur bis. Primum patet ex circuli finito ambitu spatii vero infinitate; alterum inde perspicitur, quod circuli directiones omnes, quas in diversis punctis habet, exprimuntur

per ejus tangentes; tertium inde sequitur, quod linea recta per quodvis circuli ipsius punctum, sicuti etiam per quodvis punctum in plano interno, duci potest, quod sicuti intrat circulum, ita etiam secando transgreditur, quia circulus finitus est circuitus, linea vero recta infinita.

Fig. 46.

§. 113. Si per punctum e extra circulum debeat agi linea circulum tangens: ponamus hoc factum esse in punctis tangentialibus a et a' . Ducatur ex puncto e (fig. 46) linea diametralis eM ; aganturque lineae radiales Mac et $Ma'c'$, itemque linea tangentialis cbc' in puncto circuli b . Cum triangula eMa et eMb habeant duos angulos inter se aequales, nempe angulos rectos in a et b , atque angulum β communem, erit ergo $\sphericalangle a = \sphericalangle \gamma$, triangulaque ipsa aequalia, ergo $Mc = Me$. Similiter probatur $\triangle eMa' = \triangle c'Mb$, adeoque $Mc' = Me$. Cum ergo et Mc et Mc' sint aequales lineae Me , erunt etiam inter se aequales. Jam vero, cum $Mc = Mc'$, et angulus Mbc , ergo etiam Mbc' rectus sit, et latus Mb sibi ipsi idem: erunt triangula Mcb et $Mc'b$ inter se aequalia; ergo etiam $cb = bc'$; et cum $cb = ae$, et $c'b = a'e$, erunt etiam ae et $a'e$ aequales, ergo etiam triangula aem et $a'em$ aequalia, proinde $\sphericalangle a = \sphericalangle a'$, simulque aequales angulo γ et γ' . Ut ergo ex puncto e ducantur lineae tangentes ad circulum aba' , ducatur linea diametralis eM , et in puncto b , ubi ea circulum secat inter puncta e et M , ducatur linea tangentialis cbc' satis longa, ad quam utrinque applicetur Mc et $Mc' = Me$; per puncta dein c et c' ducantur lineae cM et $c'M$; quae circulum secant in punctis a et a' : lineae ea et ea' ergo erunt tangentes quaesitae.

Fig. 47.

Hoc problema concinnius etiam solvitur hoc modo (fig. 47). Cum linea diametrali ebM , describatur circulus cMc' , et cum radio $Ma'c' = 2Mb = Mac$ describatur circulus $c'b'c$, qui priorem secabit in punctis duobus c' et c ; tunc lineae Mc et Mc' secabunt circulum aba' in duobus punctis a et a' , quae erunt puncta tangentialia quaesita. Nam cum $Ma' = a'c'$ et $Ma = ac$, et $eM = ec' = ec$, erit ea' perpendicularis in lineam Mc' puncto a' uti linea ea perpendicularis in lineam Mc puncto a (§. 92); ergo ea' et ea tangunt circulum aba' *). —

Si duo rectae ad circulum diversimode adplicantur, variae oriuntur et linearum apotomarum et angulorum rationes, quarum praecipuae hae sunt.

Fig. 48, a.

§. 114. Si duo rectae bc et de (fig. 48, a) intra circulum se secant puncto a , segmenta eorum homologa intra circulum proportionalia sunt, nempe $ab \dots ad = ae \dots ac$. Nam $\sphericalangle a$ et $\sphericalangle a'$ aequales sunt, ut et $\sphericalangle \beta$ et $\sphericalangle \beta'$, quia ut anguli peripherici eidem arcui insistent (§. 107), ergo $\triangle adc \sim \triangle abe$, ergo latera homologa $ab \dots ad$, et $ae \dots ac$ in eadem sunt ratione; quin et $ab \dots ae = ad \dots ac$. —

Fig. 48, b.

Si (fig. 48, b) arcus bd et ec aequales sunt, erit $\alpha = \beta$, et $\alpha' = \beta'$, ergo $be \parallel dc$, et viceversa. Tunc linea fg in be et dc per punctum sectionis a perpendicularis per centrum transit. Nam fg bisecat simul angulos bae et dac , ergo arcus $bf =$ arcui ef , atque $dg = gc$, unde fit $bf + bd + dg = fe + ec + cg$.

Fig. 48, c.

Hoc ergo casu rationes $ab \dots ad$ et $ae \dots ac$ sunt etiam quoad magnitudinem terminorum homologorum eadem. Si vero punctum a ipsum sit centrum (fig. 48, c), ab , ad , ae , ac sunt radii, et formant rationes identicas $1 \dots 1 = 1 \dots 1$.

*) Haec methodus priorem antecellit eo, quod generaliter pro omnibus sectionibus conicis valet. (Vid. Boncharlat theorie des lignes courbes du 2me ordre p. 165).

Quin etiam, si duo rectae, bc et de extra circulum se secant in puncto a , segmenta earum homologa ad centrum proportionalia sunt (fig. 48, d), quia anguli β et β' eidem arcui insistent, angulus vero α triangulis abe et adc communis est, quae triangu-
Fig. 48, d.

Cum haec proportionalitas obtineat, quantumvis parvus sit arcus de , aderit ergo etiam eadem, si de fiat $= o$, quo linea ad fit tangens atque media proportionalis inter ab et ac (fig. 48, e).
Fig. 48, e.

§. 115. Linea quaevis in diametrum perpendicularis, uti ab fig. 49, est media proportionalis inter segmenta diametri per eandem data. Nam prolongata hac perpendiculari, usquedum circulum in c egrediatur, erit (quia arcus dc aequalis est arcui db ergo $\sphericalangle a = \sphericalangle \delta$ et $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$) $ab = ac$. Sed (114) $ad \dots ab = ac \dots ae$, ergo, cum hic $ab = ac$, erit $ad \dots ab = ab \dots ae$.

Idem probatur ductis chordis auxiliaribus db et bc . Nam quia de diameter est, erit ejus angulus periphericus dbe constanter rectus (§. 108); ergo circulus est locus geometricus theorematis sic dicti Pythagorici, omnesque hic locum habent proportion-
nes, quas theoria linearum rectarum antiparallelarum offert, et quae ex similitudine triangulorum adb et bae sequuntur; inter quas etiam est $ad \dots ab = ab \dots ae$.

§. 116. Problema inter duas quascunque rectas ab et bd (fig. 50) inveniendi pro-
Fig. 50.
portionalem mediam bc generaliter solvitur per proportionem modo (114 s.) expositas. Nam jungantur lineae datae ab et bd in unam lineam rectam abd , quae applicetur circulo cuilibet ut chorda; per punctum b ducatur hujus circuli diameter mbn , in quem per punctum b fiat linea cbf perpendicularis: tunc erit cb sive bf linea quae-
sita, quia (114) $ab \dots bf = cb \dots bd$, hoc est, cum hic ob chordam cf per dia-
metrum sibi perpendiculararem bisectam bf sit $= cb$, $ab \dots cb = cb \dots bd$.

Hujus solutionis specialis casus est, si linea abd assumatur pro chorda diametrali, ubi linea mbn cum ipsa coincidit, ergo cbf fit perpendicularis. Hoc quidem casu so-
lutionis demonstratio etiam ex theoremate (§. 115) proposito profluit.

§. 117. Si (figura 51) linea recta af per circulum, qui per ejus punctum finale a transit, et per circuli centrum, atque per dicti circuli tangentem, quae tangens lineam datam in altero puncto finali secant, et per perpendiculararem e puncto tangentiali in rec-
tam demissam, dividatur in quatuor apotomas ac , cd , de , ef , erunt hae apotomae ordine ab extremis terminis inverso proportionales, hoc est, erit $ac \dots cd = ef \dots de$.
Fig. 51.
Nam $ad \dots dg = dg \dots de$; et $cd \dots dg = dg \dots df$, quia angulus cgf uti et angulus cdg rectus est; ergo componendo $ad \dots cd = df \dots de$, etiam $cd \dots de = ad \dots df$; ergo subtrahendo $ad - cd \dots cd = df - de \dots de$; unde sequitur: $ac \dots cd = ef \dots de$.

Et cum itaque sit $cd \dots de = ac \dots ef$, erit quoque addendo $cd \dots de + cd = ac \dots ac + ef$, hoc est $cd \dots ce = ac \dots cf = ce \dots cf$. Unde derivatur metho-
dus inveniendi mediam proportionalem inter datas lineas cd et cf , in puncto c simul terminatas.

§. 118. Post sectiones has linearum ad circulum proportionales proxime sequuntur sectiones rectarum ad circulum harmonicae, ut nempe recta $abce$ (fig. 52) dividatur in
Fig. 52.
tres partes ita, ut tota linea ae sit ad unam partium extremarum ab , ut extremarum

altera ce ad partem mediam bc , hoc est: $ae \dots ab = ce \dots bc$, et $ae \dots ce = ab \dots bc$. *)

Quae sectiones rectarum ad circulum harmonicae inserviunt ad circuli theoriā perficiendam, cum ab iisdem dependeant relationes tangentium a puncto quovis et a linea quavis extra circulum ad eundem ductarum, quas habent pulcherrimas ad circulum ipsum, ad circuli chordas, tangentiales, et ad puncta intra circulum. Praeterea circuli theoria per sectiones harmonicas ad circulum occurrentes cum reliquarum conicarum sectionum theoria intime cohaeret.

Fig. 52.

§. 119. Si ex puncto a diametri prolongati (fig. 52) ducatur ad circulum tangentialis ah , atque ex puncto contactus g sicuti etiam de punctis circularibus diametri illius b et e ducantur perpendiculares bf , eh in eundem diametrum; et illa diameter et linea illa tangentialis ah secantur harmonice. Nam ductis lineis bg , dg et eg puncta sectionis diametri conjungentibus cum puncto tangentiali, est $\angle fbg = \angle fgb$ (§. 88), itemque $\angle hge = \angle heg$. Est ergo $eh \dots bf = gh \dots fg = ah \dots af$, quia $fg = bf$, et $gh = eh$; proinde quia tangentialis ah secatur harmonice in punctis a , f , g , h , uti et diameter in punctis a , b , c , e , cum ea sit inter easdem lineas parallelas cum tangentiali. —

Fig. 53.

§. 120. Si (figura 53) tangentium duarum af et ag puncta in circulo f et g jungantur lineā fg , tunc omnes lineae, quae dictam fg intra f et g secant, harmonicae sunt, uti ad in a , b , c , d .

Nam bisecetur fg in q , et super linea variabili bd , ut diametro, describatur circulus dhb . In punctis b , c et d erigantur perpendiculares bi , ch , de , et ex puncto a per punctum h agatur ahe . Ergo $fa^2 = fq^2 + aq^2$. Sed cum $fc \cdot cg$ sit $= (\frac{1}{2}fg + qc) \cdot (\frac{1}{2}fg - qc) = \frac{1}{4}fg^2 - qc^2$; et fq^2 sit $= \frac{fg^2}{4}$, erit ergo $fq^2 = fc \cdot cg + qc^2$. Jam ac^2 est $= aq^2 + cq^2$; proinde erit $fa^2 = fc \cdot cg + ac^2$. Ob proportionem vero ad circulum (§. 114) est $fc \cdot cg = bc \cdot cd = hc^2$; indeque $fa^2 = fc \cdot cg + ac^2 = hc^2 + ca^2 = ah^2$ (ob theorema Pythag.); ergo $af = ah$. At $ab \dots af = af \dots bd$ (§. 114); ergo etiam $ab \dots ah = ah \dots bd$ (quia ah et af aequales sunt), quare linea ahe circulum bhd tangit in h . Quare (§. 119) et linea ae et linea ad sunt harmonicae.

Hujus propositionis conversa etiam vera est; nempe, si linea quaevis ex puncto a extra circulum per circulum acta sit in punctis a , b , c , d harmonica: tunc punctum c est in chorda ea fg quae puncta tangentialium af et ag in circulo conjungit. Nam describatur chorda haec tangentialium dictarum, quae, nisi per c transeat, transire de-

*) Primus, quod sciam, hanc sectionem detexit Apollonius Pergaeus (Conicorum L. III. prop. 36 — 40), quamquam ei nomen peculiare non indiderit, deinde primum Borellius in compendio sectionum conicarum (Romae 1679), quarum theoriā primus huic sectioni superstruxit, eidem sectioni nomen analogiae conterminalis dedit. Nomen harmonicae sectionis, quod primus adhibuisse videtur Blondel (v. Mém. de l'Acad. des sciences depuis 1666 — 1699 T. V. p. 396) inde venit, quod ratio numerorum 3 .. 4 .. 6 ejusmodi sectioni respondet; quibus rationibus in arte Musica definitur ratio soni fundamentalis ad ejus quartam, quae est $\frac{3}{4}$, atque ad ejus quintam, quae est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, et ad ejus octavam, quae est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Optime vero sectionem harmonicam et lineas harmonicales tractavit de la Hire in opere Conico (Parisiis 1685).

hebit per aliud lineae ad punctum, quod vocetur c' ; ergo per propositionem directam recta ad erit harmonice divisa in punctis a, b, c', d , quod esse nequit, cum ex hypothesi eadem linea in punctis a, b, c, d harmonice dividatur.

Reliquae de lineis ad circulum harmonicis hic tradi non possunt, quia ad eas non sectionis tantum harmonicae, sed etiam linearum harmonicalium theoria *) supponitur, quam hic lemmatis loco exponere nimis longum foret.

§. 121. Constructis principalibus tangentium affectionibus, consideremus nunc chordarum circularium proprietates praecipuas. Si ergo cogitetur arcus circularis inde a nihilo in infinitum crescere, invenitur pro longitudine arcus $= 0$, etiam chorda $= 0$. Exinde quidem longitudo et angulus internus arcuum semper in eadem ratione crescunt, minime vero chorda, ut patet ex relatione chordarum ad radium et diametrum. Quodsi ergo (fig. 54) exeundo ab arcu $= 0$ in puncto a , ubi et chorda $= 0$, cogitetur arcus ab continuo crescere, crescet ergo continuo ejus angulus centralis aMb , quia is est (§. 89) $=$ angulo flexus arcus continuo crescenti. Cum ergo triangulum aMb crura aM et bM continuo magis aperiat, usque dum angulus centralis fiat latens $= 180^\circ$, sequitur chordam, quae est dicti trianguli tertium latus, usque ad $\angle aMb = 180^\circ$ etiam continuo crescere; minime vero in eadem ratione ac angulus aMb sive longitudo arcus ab , (uti trigonometria, a theoria circuli in se plane non dependens, id docet). Sed si arcus ab ultra 180° crescat, chorda inde a valore diametri iterum decrescit, idque ita, ut angulis centralibus sive arcubus duobus formae $180^\circ \pm p^\circ$ eadem longitudine chorda competat; nam inde ab $\angle bMa = 180^\circ$ chorda non amplius subtenditur arcui abb' ... ipsi, sed potius angulo ei, qui a valore 180° tantum minor est, quantum angulus abb' ... valorem 180° excedit. Pro arcu $ab = 360^\circ$ ergo chorda iterum est $= 0$. Et manet quidem chorda per totum circuitum, si cogitetur ab a versus b directa, positiva. Et cum arcus inde ab a in infinitum circumeundo crescat, sequitur, chordam infinite multis vicibus a valore arcus $= 0$ usque ad valorem ejus $= 180^\circ$, nempe inde a valore $= 0$, usque ad valorem diametri, ut valorem maximum, crescere, indeque eadem lege decrescere usque ad angulum $= 360^\circ$, ubi ad minimum valorem $= 0$ redit, ita ut una eademque longitudo chorda infinite multis arcubus competat, comprehensis sub forma $z \cdot 180^\circ \pm p^\circ$, denotante z numerum quemvis integrum, et p° quamlibet magnitudinem 180° minorem, simulque ita, ut omnes omnium angulorum chordae sint positivae. Omnes vero chordae sunt negativae, si in eodem circulo spectentur ab altero arcus ab puncto finali b versus a ductae esse. **)

§. 122. Ex doctrina de figuris rectilineis regularibus relata ad doctrinam de circulo patet, circulum esse earundem locum geometricum; et posse omne polygonum regulare circulo, sicuti viceversa circulum omni polygono regulari et inscribi et circumscribi. Quod si fiat, polygoni regularis latera aut circulum inscriptum tangent, aut erunt circuli circumscripti chordae, pertinentes ad arcum tot graduum, quot angulus polygoni regularis externus sive centralis complet; quo in genere maxime memorabilis est valor lateris hexagoni regularis, qui aequatur radio, et cujus angulus centralis est $= 60^\circ$. —

*) Egregie eandem tradidit *de la Hire* in sectionibus conicis. Parisiis 1685.

**) Sin autem chordae mere quantitative, ut duplex sinus aut cosinus, spectentur, sequuntur signum $\pm$ sinuum aut cosinum. —

§. 123. Hinc simul patet, rationem longitudinis arcus unius revolutionis $= 360^\circ$ ad longitudinem radii per methodum laterum polygonorum regularium approximando inveniri posse; quamquam circulus, ut linea curva, neque debeat neque possit cogitari ut linea constans ex infinite multis lateribus rectilineis infinite parvis. (§. 18). Nam hic non quaeritur rectitudo aut curvitas, sed tantum magnitudo longitudinis linearum, et summae laterum polygonorum, et circuli. Neque etiam quaeritur polygonum ultimum; nam ultimum polygonum ob id ipsum, quod infinite multis lateribus constare deberet, quod pro ambitu ejus finito impossibile est, quantumvis parvum ejus latus sit, plane non datur: sed potius hujus polygoni limes quaeritur, qui per constructionem probatur circulus esse; qui limes, definita ratione expressus, adeo inveniri potest, quamvis circuli nulla injiceretur cogitatio. Hac igitur methodo neque circulus declaratur esse polygonum infinite multis lateribus constans, neque polygonum pro circulo infinite parvis arcubus constante; neque magis polygonum mutatur in circulum, aut circulus in polygonum, quasi in se transeant; sed potius circulus non mutatus, qua talis, vi rationis judicantis (durch ein Vernunfturtheil) ut limes longitudinis polygoni judicatur, cujus laterum numerus pro eodem radio, sine fine multiplicando, augeatur. —

Hac igitur via monstratur perimetrum polygoni regularis 3072 laterum esse ad ipsius et circuli radium ut 6,283184062464 .. ad 1; ergo ad diametrum ut 3,141592031232 ... ad 1. Quod si semiperipheria signetur per π , radius per r , diameter per d , erit $\pi \dots r = 2 \pi \dots d = 3,141 \dots \dots 1$. —

Jam vero cum haec via approximativa infinita sit, restat quaestio: num ratio longitudinis arcus, qui sit toti peripheriae aut ejus parti commensurabili aequalis, ad radium, sit ipsa ad unitatem radii commensurabilis aut incommensurabilis? Quamdiu ergo haec quaestio reliqua erat, non plane absurda fuit multorum expectatio et industria, numeros detegendi integros, qui rationem peripheriae ad radium accurate exprimerent. *) Postquam vero tandem a *Schulzio* **) inventa est demonstratio elementaris analytico-geometrica: rationem hanc incommensurabilem esse, nemo sane, qui eandem perspexit, numeros integros pro hac ratione quaeret.

Quamquam his speciminibus historiae Matheseos non nisi secundaria ratio haberi debeat, tamen non abs re fore spero, si quaedam ad hujus theorematis gravissimi, quod tot exagitavit ingenia, historiam notentur.

Inter varias rationem peripheriae ad radium inveniendi methodos primum innotuit approximativa per latera polygonorum regularium circulo inscripta et circumscripta; cujus methodi naturam quidem intime perspexit *Archimedes*, neque tamen constructionem ultra polygonum 96 laterum continuavit, calculum vero, ob algorithmi decimalis defectum, ne ad hunc quidem terminum accurate absolvit, sed tantum demonstravit, hanc rationem esse inter 22 .. 7 et 223 .. 71, sive inter 3,1428 .. 1 et 3,1408 .. 1. Dein *Ludolph van Ceulen*, anno 1610, secundum eandem methodum valorem hunc usque ad

*) Horum tentaminum peripheriam circuli rectificandi, sive quod eodem redit, planum per eandem comprehensum, quod etiam circulum vocant, quadrandi, recensum usquedum completissimum, eumque aliquatenus criticum, dedit *Kraft*, in *Geometria sublimiori*, Tubingae 1753.

**) In libro: Sehr leichte und kurze Entwicklung einiger der wichtigsten mathematischen Theorien. Königsberg 1803.

34 locos decimales exactum invenit. Scharpe *) deinde calculum usque ad 73-um locum, Machin vero anno 1706 usque ad 100-um locum perduxit. Hunc excepit de Lagny, qui anno 1719 usque 127 locos decimales pervenerat; sed dein Vega usque ad 140-tum locum decimalem novo calculo, sed alia methodo usus, progressus est, unamque cifram, ordine 113-am falsam in de Lagnyi calculo correxit. **)

Methodi vero expeditiores hanc rationem calculandi fundantur theoria serierum, in quas lineae trigonometricae resolvuntur, quibusque earundem intima natura quasi aperitur. Quo in genere Brownker primus docuit adhibere fractiones continuas, ac Wallisius egregia multa docuit. Jam James Gregory ***) et post eum Leibnitius invenit hac via $\pi \dots r = 8 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots \right) \dots 1$ Eulerus****) vero:

$$= 4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + - \dots \\ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + - \dots \end{array} \right\} \dots 1.$$

Formulam etiam compendiosiore attulit Lacroix †)

$$\frac{\pi}{4} \dots 1 \text{ sive } \frac{\text{arc. } 45^\circ}{1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{5} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot (25)} + \frac{1}{5 \cdot (25)^2} - \frac{1}{7 \cdot (25)^3} + - \dots \right) \\ - \frac{1}{139} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot (57121)} + \frac{1}{5 \cdot (57121)^2} - \frac{1}{7 \cdot (57121)^3} + - \dots \right) \end{array} \right\}$$

cujus seriei tres termini rite calculati dant valorem decadicum, cujus novem priores loci decadici exacti sunt. —

Lambertus vero ††) commendat hanc seriem:

$$\frac{\pi}{r} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{800} - \frac{1}{70000} - \frac{1}{5000000} \dots$$

Si expressio decimalis $\frac{\pi}{r} = 3,1415926535 \dots$ per divisionem transmutatur in fractionem continuam, uti jam Brownker et Wallisius docuerunt, oritur inde expressio:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{192 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$

*) Vid. ejus calculus in extenso apud Mazerès in scriptoribus logarithmicis. T. III. p. 142—145.

**) Confer. Lacroix Traité du calcul differ. et integral, introduction n. 43 ss.

***) Vid. Mazerès l. l. III. p. 169.

****) Exactum computum secundum Euleri methodum exhibuit Mazerès l. l. p. 169 — 184.

†) l. l. p. 72. ed. 2^a.

††) In libro: Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen, Berlin 1770, ubi habetur collectio tabularum cyclometricarum valde locuples.

quae si iterum in fractiones vulgares mutatur, sumendo deinceps $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3 + \frac{1}{7}}$ etc. dat sequentem valorum approximantium seriem:

$$\frac{r}{\pi} = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{106}{333}, \frac{113}{355}, \frac{33102}{103993}, \frac{33215}{104348} \text{ etc. *)}$$

Haec series pro fractionis continuæ natura hoc commodi habet, ut numeri hi sint alternatim pro π justo majores et minores, idque in minimis numeris, ita ut numeris minoribus aequè accedere ad verum nequeas. Tertium quidem horum valorum jam inveni-
nerat *Archimedes*, quartum vero *Adrianus Metius* (ante annum 1635).

Praeter has fractiones alii approximativi valores inveniri poterunt ope radicum irrationalium **). Ita v. c. Geometrae Indici praecipunt multiplicationem radii per $\sqrt{10} = \sqrt{2} \sqrt{5}$; quod tamen vehementer a vero aberrat, cum $\sqrt{10}$ sit $= 3,1622$ ***). Jam longe propius ad verum adtingit factor $\frac{3}{5} (3 + \sqrt{5}) = 3,14164$. Sed aeterna illa, eaque

simplicissima et pulcherrima relatio peripheriae circuli ad diametrum non intellegi atque exprimi potest, nisi modo ac methodo transcendentali. Primam ejusmodi expressionem invenit *Jo. Bernoulli* ****), ope logarithmorum naturalium, quae est $\pi = \frac{4 \log. nat. \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$.

Sed haec expressio formam transcendentalem induit simpliciore, si, ope formulae notae, logarithmus naturalis numeri cujusvis $n = \infty \left(n^{\frac{1}{\infty}} - 1 \right)$ mutetur †) in hanc

$$\pi = \frac{2 \cdot \infty}{\sqrt{-1}} \left\{ 1 + (\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1 - \sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} \right\}; \text{ quae secundum formulam bino-$$

mialem evoluta dat immediate: $\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$ sive $\pi = 3,14159 \dots$

Simplicissimam autem hujus rationis transcendentalem formam primus vidit *Vandermonde* ††) calculi factorialis inventor; quae est, signis algorithmi factorialis expressa:

$$\sqrt{\pi} = 2 \left[\frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ sive secundum Krampii notationem } \sqrt{\frac{1}{2}} \pi = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} | -1 \quad \dagger\dagger\dagger).$$

*) Ultra hos adhuc decem proximi termini inveniuntur in *Lamberti* libro laudato p. 145.

**) Magnam ejusmodi valorum copiam affert ac trutinat *Kraft*. l. l.

***) Huc enim redit methodus tradita in libro originis Indicae pervetustae, quod anglice edidit *Colebrooke* sub titulo: *Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhāscara*. (London, 1817 p. 308, s.)

****) Cujus videatur computus in opere: *Traité du calcul diff. et intégr. par Lacroix*, 2^me ed. introd.; et in *Wronskyi* opere egregio: *introduction à la philosophie des mathématiques*. 1811. p. 25 ss. Hic Geometra vocat rationem $\frac{\pi}{r}$ numerum philosophicum, — et sane profunde de eodem l. l. philosophatus est.

†) V. *Wronsky*. l. l. p. 26.

††) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1772, première partie p. 489.

†††) Inde traxit *Eytelwein* (vid. *Grundlehren der höheren Analysis*, B. II. p. 682) expressio-
nem $\pi = 4 \left(1^{\frac{1}{2}} | 1 \right)^2 = 2^2 \left(1^{\frac{1}{2}} | 1 \right)^2$. —

Cum enim haec expressio praeter numeros 1 et 2 alios non contineat, simplicior hoc sane respectu inveniri nequit. Memoratuque dignum est, hanc expressionem, si ad vulgares numeros redigatur, dare $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$ formulam valde simplicem, et celeriter approximativam, quam alia via jam antea *Wallisius* *) detexerat.

Apte etiam *Lacroix* adnotat, *Vandermondii* expressionem $\sqrt{\pi} = 2 \left[\frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$ esse analogam huic: $\sqrt{2} = 2 \sqrt{\frac{1}{2}}$; priorem exprimere latus quadrati aequivalentis areae circuli, cujus radius = 1, alteram vero lineam diagonalem quadrati, cujus latus = 1. **)

§. 124. Restat, ut determinetur numerus graduum arcus ejus, cujus longitudo est aequalis radio, quem angulum antea (§. 69) vocavimus ang. r sive u° . Jam vero, uti se habet radius ad peripheriam, ita se habet u° ad 360° . Cum semipheria π sit = 3,14159 ... $\times$ rad.; et $2\pi = 6,2831 \dots \times$ rad.: habetur proportio: radius .. periph. = 1 .. 6,2831 ... = u° .. 360° , indeque $u^\circ = \frac{360^\circ}{6,2831^\circ} = 57^\circ, 2957795130823 \dots$ sive $57^\circ, 17', 44'' \dots$ Unde expressio $\epsilon = \frac{u^\circ}{10}$ (§. 69) est = $\frac{57^\circ, 2957 \dots}{10}$.

Sectio II.

Theoria analytico-geometrica elementaris circuli, sive discussio aequationis originariae circuli $l = \frac{p}{q} w$. (§. 81).

§. 125. Si e proportionibus in circulo ipso, sive ad circulum per ejus naturam datis (§. 114) eliciantur aequationes, per unam quamque earum exprimetur circuli natura, uti per proportionem istas. Quarum proportionum cum infinita sit copia, sequitur: infinite multas dari analyticas circuli definitiones per aequationes exhibendas, quarum unaquaevis circuli naturam exprimit ita, ut, si recte discutiatur, inde omnium circuli proprietatum constructio deducatur. Inter omnes has infinite multas circuli definitiones analyticas ea quidem originaria est, quae immediate ex curvaturae uniformitate fluit. Sed per hanc datur (§. 81) proportio generalis $l \dots w = p \dots q$, unde sequitur aequatio $ql = pw$, sive $l = \frac{p}{q} w$ et $w = \frac{q}{p} l$, vel etiam $\frac{l}{w} = \frac{p}{q}$, vel denique $\frac{w}{l} = \frac{q}{p}$, quae ergo aequationes circuli naturam simplicissime exprimunt; quare aequatio circuli $l = \frac{p}{q} w$ pro originaria, simplici, immediata, ideoque vere scientifica et primaria habenda est.

*) Vid. *Wallisii* arithmetica infinitorum (Lond. 1655) et in ejus operibus.

**) Vid. *Lacroix* libro laudato. T. III, p. 132. —

Sed inter multas alias proportiones, quae mediate e curvaturae uniformitate fluunt, est etiam (§. 115) (fig. 49) haec: $ad \dots ab = ab \dots ae$, unde sequitur $ab^2 = ad \cdot ae$, ubi lineae ab , ad , ae cogitantur expressae secundum unam eandemque unitatem longitudinarem. Ex hac ergo aequatione, quae hoc incommodi habet, ut anguli nullus habeatur respectus, deduci potest aequatio circuli per coordinatas rectas rectangulares, qua Geometrae inprimis uti solent.

§. 126. Si in quavis infinite multarum aequationum constitutarum curvae et longitudo arcus l , et, si etiam anguli in aequatione insunt, magnitudo anguli finalis (§. 66) w ad l pertinentis cogitantur ut magnitudines variables, crescentes a valore ± 0 usque ad terminum, quem natura aequationis indicat; et si omnibus his valoribus analyticis continuis adsignentur continuo valores definiti in spatio, et longitudinum et angulorum: tunc ope cujuslibet harum aequationum constitutarum construetur curva inde definita, derivabunturque certo ordine omnes hujus curvae proprietates characteristicae, et quidem in casu nostro circulus. Jam si id fiat secundum aequationem circuli originariam $l = \frac{p}{q} w$, orietur statim, immediate, circulus ipse, cum longitudo l sint arcus ipsi,

atque w eorundem anguli; sin vero per alteram, quam diximus, aequationem, tunc non nisi longitudo rectarum ad circulum, quae inter se conjunctae sunt angulo recto dab , idque ita, ut punctum finale lineae continuo crescentis ab , quae perpendicularis sit in puncto finali alterius, item continuo crescentis lineae ad , det omnia puncta successiva, quae quidem non sunt circulus ipse, attamen in circulo omnia insunt; unde deinceps inverso ordine, mediataque via, circuli proprietates constitutivae deducuntur. Prior vero, circulum analyticè determinandi methodus, uti unice originaria est, (cum ex rei definitione unicà essentiali fluat,) quin in se organica est, etiam respectu practico optimam se exserit. Nam si quis velit sine omni instrumento, imo clausis oculis, circulum manu, vel gradiendo toto corpore, describere, hoc unicum adtendere necesse habet, ut manum, seu graphidem manu, aut totum corpus, continuo versus eandem plagam convertat aequabiliter, ita ut longitudini viae s. arcus proportionatum angulum continuo tribuat; ut vero simul ad centrum respiciat, minime requiritur; nam conversionis aequabilitate observata, curva descripta necessario in se redibit et circulus fiet. Qui hac methodo utantur, post brevem exercitationem libera manu circulum satis accuratè depingere scient. —

Inter derivatas ac secundarias circuli relationes est etiam illa, quae inter radium circa centrum gyrantem et angulum centralem intercedit; secundum quam, si radius vocetur r , erit r conjunctus cum quolibet angulo w centrali variabili, et erit item $l = \frac{p}{q} w$ centrali. Sed et haec relatio non ita simplex est quam illa, quae aequatione originaria perhibetur, quia non circulum ipsum, sed tantum peripheriae puncta praebet, ita ut haec constructio qua talis ne curvatis quidem loci horum punctorum geometrici ullam cogitationem menti injiciat, id quod et *Euclides* elementorum suorum exemplo comprobatur, in quibus de circulo ingeniose agitur, sed curvatis ejus plane nulla mentio fit. Habet vero circulus proprietatem hanc characteristicam, ut ejus aequatio polaris cum ejusdem aequatione generatrice originaria plane eadem sit; quod in lineis versicurvatis non obtinet, nisi ratio angulorum centralium, qui per ϕ denotari solent, eadem lege immutetur, ac ratio angulorum flexus, uti id in linea logarithmica longitudinari

(§. 67) obtinet, cujus aequatio originaria est $w = b \cdot \log. l$, itemque ejus aequatio polaris est $\varphi = b \cdot \log. l$. —

§. 127. Ut ergo aequatio $ql = pw$, sive $l = \frac{p}{q}w$ construatur, assumtis unitati-

bus fundamentalibus $\bar{1}$ et $\dot{1}$ (§. 32, §. 66) statui debet directio fundamentalis RR' , seu linea directrix (§. 40, §. 66); quae quidem parallelismo continuo ubique adesse cogitanda est in plano circuli, sed commode exprimitur seu exponitur per unam definitam lineam RR' , in qua deinde etiam sumatur arcuum sive linearum curvarum l initium, quod vocamus J , (§. 66); nam l in initio est $= 0$, ergo $\frac{p}{q}w = 0$, hoc est quia $\frac{p}{q}$ non esse potest $= 0$, erit et $w = 0$, hoc sibi vult, directio prima arcus Jab directioni fundamentalis RR' non est opposita, ergo ipsi parallela; deinde vero etiam statuatur plaga, quorsum continuo deflectendum sit formandis angulis w ad longitudines arcuum l pertinentibus; uti id in prooemio (§. 45) docuimus ope figurae 14-ae.

§. 128. Quenam harum viarum constructionis, figurâ 55, monstratarum in quo-
vis casu ineunda sit, hoc ex aequatione ipsâ definitur, prout ejus membra et termini aut positivitatis aut negativitatis signo afficiuntur. Jam in aequatione circuli originaria non nisi quatuor termini simplices insunt, duo variables, l et w , et duo constantes, p et q . Ergo quanam de quatuor constructionibus per spatii naturam possibilibus, figurâ 14 exhibitis, locum habeat, definitur per signa $+$ vel $-$ terminos w , l , p , q afficientia. Fig. 55.

§. 129. Ac primo quidem terminos constantes p , q supponamus positivos, ut res tantum ad variabilium signa redeat. Jam cum in aequatione $ql = pw$, aut l ope w , aut w ope l construi possit, (§. 67); et cum linea identice curva ita sit comparata, ut ejus consideratio angularis et longitudinalis indifferens sit, (67, conf. §. 137), ponamus prius. Si ergo assumantur l positivae, patet etiam w esse positivos; nam secundum generalia analyseos praecepta terminus positivus nulli nisi positivo termino quoad oppositivitatem directionis, aequalis esse potest; ergo pro $+l$ habetur $+\frac{p}{q}w$, proinde $+w$, quia $+\frac{p}{q}$ assumimus. Ergo hoc casu describitur ramus curvae abc (fig. 55); qui quidem inde a valore $+0$ infinitus est; nam pro $+l = +0$ habetur $+\frac{p}{q}w = +0$, proinde $w = +0$, cum $\frac{p}{q}$ non esse possit $= 0$; pro $l = 1$ fit $1 = \frac{p}{q}w$, ergo $w = \frac{q}{p}$; pro $w = 1$ fit $\frac{q}{p}l = 1$, proinde $l = \frac{p}{q}$; pro $l = +\infty$ habetur $+\infty = +\frac{p}{q}w$, ergo cum $+\frac{p}{q}$ habeat valorem finitum ex hypothesis, erit $w = +\infty$. Pro tl denotante t factorem quemvis realem, erit $w = t \frac{q}{p}l = \frac{tq}{p}l$; sed $l \dots tl = \frac{q}{p}l \dots \frac{tq}{p}l = w \dots tw$; ergo l et w continuo proportionaliter crescunt. Quare ramus $+abc$ sine fine circumvolvitur. Negativi vero anguli pro positivis arcuum longitudinibus non admittuntur, ergo curvae nullus ramus vergit ab $J = a$ versus β' .

Si nunc faciamus etiam l , nempe longitudinem arcuum, negativam, ex analyseos legibus etiam w debet esse negativus, ideoque ramus alter curvae inde ab initiali

puncto a versus b' porrigitur, gressu retrogrado et angulo negativo sinistrorsum flectente; positivi vero w pro hoc ramo non admittuntur, quia negativus terminus, qualis, positivo termino qua tali non potest esse aequalis; ergo nullus curvae ramus versus $a\beta$ extenditur.

Porro, si comparemus $+l = +\frac{P}{q}w$ cum $-l = -\frac{P}{q}w$, elucet, has aequationes non quantitativa terminorum constitutione, sed unice directionis qualitate differre, ideoque ramos utrosque abc et $ab'c'$ quoad magnitudinem formamque plane identicos esse, ergo etiam utrumque inde a valore $= 0$ aequabiliter in infinitum crescere. Et cum pro $+l = +0$ sit $+w = +0$, sed pro $-l = -0$ sit $-w = -0$, sequitur, curvam in puncto J habere directionem initialem RR' pro ramo positivo, sed directionem $R'R$ pro ramo negativo initialem. Jam vero, cum spatium, ergo et planum in quo curva describitur, sit in se continuo identicum, curva vero, per $l = \frac{P}{q}w$ definita, habeat duos ramos ab eadem linea directrice RR' aut $R'R$ utrinque quantitate formaque plane eosdem: sequitur, duos hos ramos sibi in eodem puncto ad angulos $\pm 180^\circ$ occurrere debere, seque inde sine fine amplecti. *) Simul sequitur, arcuum chordas sequi signum longitudinum, v. gr. chordam ab esse positivam, sed chordam ab' , quatenus est chorda negativae longitudinis ab' , negativam. Id quod minime repugnat ei, quod no. 121 demonstratum est. Nam quatenus linea recta ab' est chorda arcus positivi $abcdeb'$, est positiva, quatenus vero est chorda longitudinis $-ab'$ eadem negativa est.

§. 130. Ex modo demonstratis patet, si circulus consideretur a quolibet ejus puncto, eum hoc saltem respectu duobus ramis, quoad materiam (dem Gehalt nach) s. objective, plane identicis constare, quorum tamen uterque non nisi longitudinem $= \frac{\infty}{2}$ conficiat (§. 37 et §. 39); imo adeo, si circulus cogitetur inde ab infinito quasi proveniens vel quasi regrediens unâ eademque directione in infinitum tendere, etiam hoc respectu, per rami definitionem (§. 50) ramus est, sed hac quidem directione unicus, isque aequalis infinito sui generis absoluto $= \infty$; sed cum idem circulus etiam spectari possit, ut quasi proveniens ab infinito in directione priori oppositâ, erit etiam hoc respectu ramus alter priori oppositus, idemque totam curvam comprehendens atque $= \infty$; sed si ramus prior cogitetur ut $+\infty$, erit alter huic directe oppositus $= -\infty$. Si itaque hic duo rami simul cogitentur, erunt quoad directionum oppositivitatem $= 0$, objective vero s. hypostatice spectati non sunt, nisi una et unica infinita curva, quae non nisi per directionis momentum idealiter duplicatur, ideoque directionali oppositivitate, secundum quam habetur $+\frac{\infty}{2} - \frac{\infty}{2} = 0$, sublatâ, in unitatem hypostaticam mente

*) Quamquam enim hypostatice circuli peripheria in spatio finita est, nihilominus tamen pro trigonometricarum functionum ad circulum adhibendarum constructione, et pro generali analytica circuli constructione perficienda, omnes respectus, quibus circulus infinitus est, aut $+\frac{\infty}{2}$ aut $-\frac{\infty}{2}$, aut ∞ absolute, accurate investigandi et perspicendi sunt; quod, si omittatur, incurrentur multae difficultates inextricabiles, et contradictiones aliunde irresolubiles.

restituatur, secundum quam est pure $= \infty$, $= \frac{\infty}{2}$ et $\frac{\infty}{2}$ respectu oppositionis directionalis non habito. Nam generaliter in formula $+ a - a = 0$, signum 0 non tollit rem, hoc est minime materiam terminī a , sed tollit tantum oppositivitatem directionalem. Similiter jam linea infinita recta se habet; ejus a quovis puncto interno a sunt duo rami infiniti $+ ab \dots$ et $- ab' \dots$, ita ut $+ ab \dots$ sit $= + \frac{\infty}{2}$, et $- ab' \dots$ sit $= - \frac{\infty}{2}$; sed si spectetur inde ex infinito quasi recedere, erit $+ \dots ba = + \infty$ et $- \dots b'a = - \infty$; atque $+ \infty - \infty = 0$; quamquam, si materiam (den Gehalt) spectes, cogitaveris unam eandemque lineam rectam duabus vicibus, quae in se hypostatice est pure $= \infty$, respectu oppositivitatis directionalis non habito (§. 26). Monuimus hoc iterum, quia pro Geometria analytica summī momenti est, hoc scire. —

§. 131. Ex his vero, quae ex aequatione $l = \frac{p}{q} w$ deduximus, deinceps omnia de circulo theorematum construentur, pariter uti ex definitione ejus originaria, ex qua illa aequatio fundamentalis desluit. Quare ex hac aequatione originaria etiam deducuntur omnes aequationes constitutivae mediatae, quarum §. 125 mentionem fecimus; nam hae omnes sunt expressiones analyticae alicujus proprietatis circuli constitutivae, ad quas omnes per aequationem originariam patet aditus.

§. 132. Si augeatur l longitudine definita Δl , et w augeatur angulo Δw ad Δl pertinente, ubi ergo Δl significat incrementum seu differentiam quantitatis l , itemque Δw incrementum s. differentiam quantitatis w : erit $l + \Delta l = \frac{p}{q} (w + \Delta w) = \frac{p}{q} w + \frac{p}{q} \Delta w$; ergo detracta aequatione $l = \frac{p}{q} w$ erit $\Delta l = \frac{p}{q} \Delta w$; id quod supra ex definitione originaria circuli immediate conclusimus. (§. 86).

Quae incrementorum ratio semper eadem est, quam magna aut parva sint incrementa Δl et Δw ipsa.

§. 133. Aequatio $l = \frac{p}{q} w$, reliquis manentibus, quoad formam mutari potest eo, ut aut initium arcuum J , aut directio fundamentalis RR' , aut utrumque simul, mutetur.

Primum ergo, si longitudinum initio J manente, directio fundamentalis mutetur, (fig. 55, a, b), et assumatur nova directio fundamentalis $R''R'''$: haec ergo nova directio Fig. 55, a, b. fundamentalis a priore diverget aut angulo quodam constanti $+ w$, aut $- w$; quilibet ergo angulus inde ab hac nova directione fundamentalis $R''R'''$ constructus, per w' significandus, erit aut $w + w$, aut $w - w$.

Jam si fuerit nova directio fundamentalis $= + w$, ergo $w' = w - w$, proinde $w = w' + w$. Erit ergo $l = \frac{p}{q} (w' + w)$ et pro $l = 0$ erit $w' + w = 0$, proinde $w' = -w$ (fig. 55, a). Pro $w' = 0$ erit $l = \frac{p}{q} w$, quod erit in puncto b . Si dein w' sine fine creseat positive, idem l eveniet. Sin vero $-w'$ assumatur, et sit $-w' < w$, l manebit positiva, sed continuo minor evadet, usque dum $-w'$ existente $= w$, deveniet l ad valorem $= 0$, et quidem $= + 0$.*) Sed si $-w'$ etiam amplius ultra

*) Hic non superfluum erit monere differentiam essentialem valorum $+ 0$ et $- 0$, quippe quod $+ 0$ est limes positivae constructionis ejus magnitudinis, quae positivo signo

valorem $= w$ crescat, tunc etiam l negativa erit, eaque proportionaliter crescens inde a valore $+$ $\frac{p}{q} w$ in infinitum.

Fig. 55, b. At si sumatur directio fundamentalis alia $R'R''$, quae est inde a directione fundamentalis prima RR' $- w$, erit (fig. 55, b) $w' = w + w$, atque $w = w' - w$, unde fit $l = \frac{p}{q} (w' - w)$; ideoque pro $w' = 0$ erit $l = -\frac{p}{q} w$, in puncto b' . Si fiat w' negativus, erit etiam l negativa, atque $-w'$ et $-l$ deinde crescent proportionaliter. Si autem w' inde a puncto b' fiat positivus, manebit l negativa, donec w' fiat $= w$, ubi l fit $= -0$; unde, si $+w'$ fiat sine fine major, etiam $+l$ sine fine proportionaliter crescat. Pro $l = 0$ erit $w' - w = 0$, proinde $w' = +w$.

Fig. 55, c. §. 134. Secundo, si manente directione fundamentalis RR' mutetur initium arcuum seu longitudinum l , si supponamus pro $w = 0$, hoc est pro eo puncto, ubi construendus arcus habet directionem fundamentalem, longitudinem l aut positivam aut negativam jam constructam esse, erit ergo primo, si l assumatur positiva, (fig. 55, c) mutata longitudo arcus $l' = l + l$ atque $l = l' - l$, proinde $l' - l = \frac{p}{q} w$; unde, pro $w = 0$, erit $l' - l = 0$ ergo $l' = +l$; et pro $l' = 0$ fit $-l = \frac{p}{q} w$ indeque $w = -\frac{q}{p} l$; quod proprie significat $w = -\frac{q}{p} l \cdot i$, ita ut nunc l spectetur ut factor generalis multiplicatus in unitatem angularem (§. 65).

Erit ergo novum arcuum initium in puncto b' ubi arcus $b'a$ est $= l$, et signetur hoc novum punctum initii per J' ; unde videmus, assumptam longitudinem $pa = l$, quam per rectam exposuimus, in hac curvâ esse in formâ arcus curvae ipsius constructibilem, id quod idem ex curvaturae aequabilitate et e longitudinis infinitate versus utramque circuli plagam provenit. Si $+l'$ sit $< l$, erit semper $w = \frac{q}{p} (l' - l)$ valor negativus; valor enim l' , quamquam sit $< l$ tamen positivus est, quia inde a puncto J' antrorsum progreditur, sed ejus angulus internus, effective quidem quoque positivus est, sed tamen respective ad directionem fundamentalem adhuc negativus est, quia minor est angulo $-\frac{q}{p} l$ pro $l' = 0$ invento, qui in figurâ est angulus $Rq'b'$.

Aequationes enim non exprimunt longitudines angulosque, uti in constructione ipsa fiunt sive efficiuntur, sed uti se habent ad assumptum longitudinum initium, et ad terminum communem relationis angulorum, hoc est ad assumptam directionem fundamentalem. — Porro si $+l'$ inde a valore l ulterius crescat sine fine, angulus w etiam positivus erit, crescatque inde a valore $+0$ sine fine. Si autem l' fuerit negativa et inde a valore $-l' = -0$ sumatur, (pro quo w est $= -\frac{q}{p} l$), et crescat sine fine, tunc w etiam erit negativus, crescatque negative sine fine.

Fig. 55, a.

affecta est; sed contra -0 est limes negativae constructionis ejus magnitudinis, quae negativum habet signum. Uti e. gr. in figura 55, a, in puncto a , si constructio deveniat inde a puncto b , habetur $l = +0$, quia l antea positiva erat. At in puncto b est $w' = +0$, quia pro punctis ulterioribus versus c , w' est positivus, in quo puncto habetur $l = +\frac{p}{q} w$. —

Notandum adhuc est, aequationem $q(l' - l) = pw$ resolvi in proportionem $(l' - l) \dots w = p \dots q$. Unde fit (§. 86) $(l' + \Delta l' - l) \dots (w + \Delta w) = p \dots q$; ergo detractis membris homologis proportionis prioris erit $\Delta l' \dots \Delta w = p \dots q$. Sive etiam $(l' + \Delta l' - l) = \frac{p}{q}(w + \Delta w)$; ergo detractis lateribus duobus aequationis

$$\text{fundamentalis } l' - l = \frac{p}{q}w \text{ erit } \Delta l' = \frac{p}{q}\Delta w.$$

Si vero (figura 55, d) l assumatur negativa, erit $l' = l - l$, proinde $l = l'$ Fig. 55, d. $+ l$, ergo $l' + l = \frac{p}{q}w$. Quare pro $l' = 0$ erit $w = \frac{q}{p}l$; pro $l' = l$ erit $w = \frac{2q}{p}l$; pro $l' = ml$ erit $w = \frac{(m+1)q}{p}l$. Pro negativo l' , videmus, si $-l'$ crescat inde a valore $= -0$, quamdiu $-l'$ minor est quam $-l$, tandiu w erit positivus, sed continuo decrescens, usque dum pro $-l' = -l$, erit $w = +0$, hoc est constructio passu retrogrado reversa erit ad directionem fundamentalem RR' . Si vero $-l'$ etiam ultra valorem $-l$ accrescit, id quod sine fine fieri potest, tunc etiam w fit negativus, et crescit proportionaliter cum l' sine fine. Quae omnia monstrat figura 55, d.

§. 135. Tertio denique poterunt utraeque hae mutationes initii nempe longitudinum et directionis fundamentalis inter se conjungi. Unde, respectu habito ad oppositionis signa magnitudinum constantium l et w , quatuor oriuntur casus. Nempe

a) pro $+l$ et $+w$; ubi erit $l + l = \frac{p}{q}(w + w)$, ergo $q(l + l) = p(w + w)$

proinde $ql + ql - pw - pw = 0$ sive: $ql - pw + ql - pw = 0$;

b) pro $+l$ et $-w$; ubi erit $l + l = \frac{p}{q}(w - w)$, ergo $q(l + l) = p(w - w)$

proinde $ql - pw + ql + pw = 0$;

c) pro $-l$ et $+w$; ubi erit $ql - ql - pw - pw = 0$; sive: $ql - pw - ql - pw = 0$;

d) pro $-l$ et $-w$; ubi erit $ql - ql - pw + pw = 0$; sive: $ql - pw - ql + pw = 0$;

qui quatuor casus comprehendi possunt duobus formis sequentibus

$$\begin{cases} q(l \pm l) - p(w \pm w) = 0 \text{ et} \\ q(l \pm l) - p(w \mp w) = 0; \end{cases}$$

Unde statim concluditur, per omnes et initii longitudinum et directionis fundamentalis mutationes, quae fieri possunt, aequationem originariam circuli $l = \frac{p}{q}w$ sive $\pm ql \mp pw = 0$, ad altiore aequationis algebraicae gradum supra primum non elevari, neque eo terminos inferri posse ullos, qui habeant formam tlw , denotante t quemlibet factorem constantem praeter 0. Quare aequatio algebraica generalis primi gradus (§. 65) aliam lineam curvam praeter identice curvam s. circulum non exprimit s. definit. Si pro $\frac{p}{q}$ scribitur factor simplex a (§. 100), habebuntur formulae generales et universales

$$(l \pm l) - a(w \pm w) = 0, \text{ et}$$

$$(l \pm l) - a(w \mp w) = 0.$$

Ubi, si tantum l aut tantum w assumitur, et scribitur utriusque loco b , habetur formula $l = aw \pm b$, quae est similis formulae generali $y = ax \pm b$, quae est generalis formula rectae methodo coordinativa rectangulari tractatae, itemque aequipollet formulae $t = au \pm b$, sub qua, methodo polari, spiralis *Archimedeae* discuti solet.

§. 136. Notetur quoque circuli aequationem in infinite multis aequationibus diversae formae latere posse. Ut, si ponatur $al^2 + blw + cw^2 = 0$; erit: $l^2 + \frac{b}{a}lw + \frac{c}{a}w^2 = 0$, proinde $l = -\frac{bw}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2w^2}{4a^2} - \frac{cw^2}{a}\right)} = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \right\} w$; qua ergo aequatione duo simul comprehenduntur circuli; alter in quo p est $= -b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}$, alter vero in quo est $p = -b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}$; quibus duobus circulis $q = 2a$ communis est.

§. 137. Si loco proportionis $l \dots w = p \dots q$ sumatur $l \dots w = q \dots p$, unde derivatur aequatio circuli fundamentalis $l = \frac{q}{p}w$, atque $pl = qw$, erit ceterum tota constructio, si permutationis factorum p et q nulla habeatur ratio, plane eadem, ac pro $l \dots w = p \dots q$; et circuli C et c , per $l = \frac{p}{q}w$ et per $l = \frac{q}{p}w$ determinati, hanc inter se habent relationem, ut eorundem radii sint ejusdem unitatis multipla reciproca. Nam (§. 100) radius circuli C est $= \frac{p}{q}$ radius vero circuli c est $= \frac{q}{p}$, sed $\frac{p}{q} \dots \frac{q}{p} = \frac{p}{q} \dots \frac{q}{p}$, quae est ratio numerorum reciprocorum $\frac{p}{q}$ et $\frac{q}{p}$. Et si loco $\frac{p}{q}$ scribatur a , et comparentur duae aequationes $l = aw$ et $l = \frac{w}{a}$, erunt item radii $= \varepsilon a$ et $\frac{\varepsilon}{a}$ numeri reciproci.

§. 138. Generatim, si circuli diversi inter se comparari debeant, necesse est, ut ad eandem unitatem et angularem et longitudinarem referantur; quod aptissime fit ope radiorum. Nam cum diversorum circulorum $c, c', c'' \dots$ arcus ad eosdem angulos pertinentes, imo etiam peripheriae, et semiperipheriae se directe habeant ut eorundem radii $r, r', r'' \dots$ (§. 101), qui radii, si dictorum circulorum aequationes sint $ql = pw$, $q'l = p'w$, $q''l = p''w$, $\dots$: erunt $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \dots$: ergo, factoribus $p, p', p'', q, q', q'' \dots$ ad eandem unitatem longitudinarem redactis, erunt circuli $c, c', c'', \dots$ quoad arcuum longitudinem, ut $\frac{p}{q} \dots \frac{p'}{q'} \dots \frac{p''}{q''} \dots$

Specimen tertium.

***De lineae curvae proprietatibus
et symptomatibus generalioribus.***

Specimen certum.

De lineis curvis propriis

et symptomatibus generis.

§. 139. Omnis curva ad eam partem, versus quam deflectit, concava vocatur, ad illam vero, de qua deflectit, convexa.

Lineae curvae concavitas et convexitas illustratur per polygonismos rectilineos (§. 43, nota) continuo deflexu per angulos vel positivos vel negativos, et per latera vel positiva vel negativa (§. 39) oriundos.

§. 140. Omnis curva in quovis puncto definitam habet curvitatē s. curvaturam, quae exponitur per circulum qui habet eandem curvitatē perpetuo constantem, sive per hujus circuli radium.

Si ergo sit exponenda curvatura, quam curva versiformis (§. 58) abc (figura 56) Fig. 56. habet in puncto a , ducatur per hoc punctum recta tangentialis (§. 18) ae et normalis (§. 44) am , ita ut longitudo rectae am sit aequalis radio circuli ejus, qui habet eandem curvaturam quam habet curva abc puncto a et ducatur peripheria circuli $\alpha\beta\gamma$. Ergo circulus $\alpha\beta\gamma$ erit circulus curvaturae curvae abc in puncto a , et am radius curvaturae ejusdem puncti. Quodsi curva abc in eadem curvatura pergeret ab a per $b, c \dots$, ipsa esset circulus congruens cum circulo $\alpha\beta\gamma$; sed si abc fuerit versicurve (§. 158), ea cum circulo $\alpha\beta\gamma$ non plura puncta, quam punctum a continuo communia haberet utrinque, quia ejus curvatura inde a puncto a vel continuo major vel continuo minor fit utrinque, et quidem ad oppositas partes modo contrario aut modo eodem.

Porro, si idem continuo fiat in punctis versicurve $a, b, c, d, \dots$ (figura 57) Fig. 57. oriatur series radiorum curvaturae $am, bm', cm'', dm''' \dots$ aut deinceps crescentium aut decrescentium. Quo enim minor fit curvatura, eo major fit curvaturae radius, quo autem major curvatura, eo minor ejus radius. Ergo curvatura est in ratione reciproca circulorum vel radiorum curvaturae. Quare si curva sit in aliquo puncto infinite curva, seu habeat curvaturam infinitam, circulus contra curvaturae pro hoc puncto erit $= 0$, seu contrahetur in idem hoc punctum, itemque et curvaturae radius. Sin autem curvae curvatura sit in aliquo puncto nulla, seu si curva ibi abeat in rectam, circuli curvaturae peripheria ibi erit $= \frac{\infty}{2}$ (§. 130), itemque et radius curvaturae erit infinita recta $= \frac{\infty}{2}$ (§. 26).

Omnis ideo versicurve, quatenus continuo fit magis curva, circulum et radium curvaturae continuo minuit, quatenus vero fit continuo minus curva, eatenus curvaturae circulum atque radium continuo auget.

§. 141. Curva versiformis et circulus curvaturae ejus quam habet in puncto aliquo a , inde a linea tangentiali recta, quam habent in puncto a communem, versus eandem

partem deflectunt sive curvantur simul, ergo convexitatem et concavitatem versus eandem tangentialis partem habent; radius igitur curvaturae cujusvis puncti versicurve cogitandus est directus ab hoc puncto ad versicurve partem concavam, ceu inde a sua peripheria ad suum centrum, et haec directio radii curvaturae positiva censenda est. Et cum radius sit perpendicularis in suam peripheriam (§. 94), itemque in tangentialem ejus puncti, cui in peripheria insistit, quae tangentialis est versicurve cum circulo communis: sequitur, radium curvaturae perpendiculariter insistere etiam in versicurve.

Fig. 58.

§. 142. Si pro quolibet puncto J versicurve abc ducatur ejus tangentialis RR' , et normalis (§. 44) Jm , et agantur ex punctis normalis quibuslibet uti centris per punctum tangentialis J circuli Je , Jf , Jg , Jh , (fig. 58), omnes hi circuli versicurvam tangent in puncto J , sed unus tantum eorum $Jm = \rho$ curvaturam curvae in puncto J exponit. Nam cum horum circulorum quilibet sit totus cis quamlibet suarum tangentialium (§. 18), omnes hi circuli sunt cis tangentialem communem RR' , quae etiam versicurvam tangit; et quia versicurve curvitatem continuo mutat, circulus autem eandem curvitatem servat: sequitur versicurvam cum quolibet horum circulorum continuo praeter punctum J non aliud punctum habere commune.

§. 143 a. Omnis versicurve dac quae inde a puncto a versus unam partem uti ac fit magis curva, versus alteram vero uti ad fit minus curva, qua priorem partem, quae continuo magis curvatur, est intra circulum curvaturae pro puncto a ductum, qua alteram vero partem, quae continuo minus curvatur, eundem circulum excurrit. Unde sequitur, quemvis curvaturae circulum curvam versiformem in eo puncto, cujus curvaturam exponit, si curva ibi continuo magis, et versus alteram partem minus curvetur, secare, et quidem ita, ut curvior versicurve pars sit intra, minus vero curva pars sit extra curvaturae circulum.

Notetur, hic de arcu vel ramo versicurve agi, qui et quatenus continuo quantitate curvaturam vel minuit vel auget; quatenus autem in curva versiformi occurrunt arcus in quibus insunt curvaturae puncta characteristica, uti flexus contrarii, reversionis, vel maximae minimaeve curvaturae (§. 45, f.): eatenus relatio ejusmodi arcuum punctorumque characteristicorum ad curvaturae radios distincte consideranda venit iis curvarum theoriae locis, ubi de his versicurarum symptomatibus characteristicis agitur.

Fig. 59.

§. 143 b. Si (figura 59) inde a directione RR' et puncto a , sub angulo flexus constante α latereque constante ab formetur polygonismus rectilineus (§. 39 ss.) identicus ab , bc , cd , de , ...; itemque polygonismus rectilineus quoad angulum a quidem identicus, sed quoad latera non identicus ab , by , $y\delta$, $\delta\epsilon$, ... quae latera continuo decrescant; ita ut ambo hi polygonismi habeant primum latus commune, et sumantur prioris polygonismi identici latera numero n , itemque posterioris polygonismi latera n , dico: latera homologa amborum polygonismorum esse inter se parallela, summam angulorum flexus pro n lateribus esse in utroque polygonismo $= n \cdot \alpha$, atque polygonismi non identici n latera omnia contineri intra polygonismi identici latera eadem numero ita, ut punctum finale lateris n — ti non identici sit inter latus primum ab satis prolongatum et chordam n — tam polygonismi identici.

Nam cum ex hypothese $by < bc < ab$, atque $y\delta < by < cd$ aut bc aut ab : sequitur, latus tertium polygonismi non identici esse positum infra latus tertium identici

cd , et quidem ob anguli flexus in ambobus polygonismis identitatem positione parallela ad cd . Si nunc ducantur chordae ay , ac ; $a\delta$, ad : patet, chordam ay esse $<$ chorda ac , atque punctum y non esse in chorda ac ; at similiter punctum δ non est in chorda ad : nam sumto puncto δ' in latere prolongato $y\delta$ usque dum chordam ad secet hoc puncto δ' , et ducta chorda $b\delta'$ itemque chorda bd , erit $\angle cbd = \angle cdb$, ex hypothesis quia $bc = cd$; sed $\angle cbd + \angle cdb = \angle yb\delta' + \angle y\delta'b$, quia anguli externi pcd et $py\delta'$ sunt $= \angle \alpha$; ergo, cum in triangulo ybd' angulus ybd' sit major angulo cbd : erit ergo $\angle y\delta'b < \angle cbd$ sive cdb ; proinde latus $y\delta'$, quod protenditur majori angulo, erit majus latere by , contra hypothesin; ergo punctum δ cadit intra figuram $abcd$; nam trans chordam ad punctum δ , uti in δ'' , multo minus positum esse potest, quia tunc esset $y\delta''$ etiam majus quam $y\delta'$, quod jam nimium est. Idem demonstratur de polygonismorum lateribus deinceps subsequentibus, usque ad latus n -tum.

§. 144. Si contra (figura 60), reliquis manentibus, polygonismus non identicus habeat latera continuo crescentia $ab < by < y\delta \dots$; latera quidem homologa et nunc parallela sunt, itemque summa angulorum flexus pro n numero lateribus in utroque polygonismo $= n\alpha$, sed contra latera polygonismi non identici infra se continent omnia latera polygonismi identici eadem numero ita, ut punctum finale lateris n -ti non identici sit inter chordam n -tam et chordam $(n + 1)$ -tam prolongatam polygonismi identici.

Fig. 60.

Nam cum, ex hypothesis, $by > bc$ patet punctum finale y lateris secundi esse intra chordam secundam polygonismi identici ultra c prolongatam acp et ejusdem chordam tertiam adq atque supra latus tertium ejusdem. Punctum deinde finale δ tertii lateris non identici non est in chorda tertia adq polygonismi identici, nam si hoc fuerit, uti in puncto δ' , foret $\angle cbd = \angle cdb$, et horum angulorum summa $= \angle \alpha$, itemque in triangulo ybd' anguli $ybd' + y\delta'b = \alpha$; sed ex constructione $\angle ybd'$ est $< \angle cbd$, ergo $\angle y\delta'b > \angle ybd'$ atque $y\delta' < yb$ contra hypothesin; ergo punctum δ non est idem ac punctum δ' multo minus citra δ' versus y . Idem demonstratur de lateribus polygonismorum subsequentibus usque ad n -ta latera.

§. 145. Si e pluribus cujuslibet rectae AC punctis $a, b, c, d, \dots$ (Fig. 61) radiis $aA, bA, cA, dA, \dots$ ducantur totidem circuli, et sumatur arbitrario arcus AB , cujus angulus flexus, sive huic aequalis (§. 89) angulus centralis, sit $= \alpha$; ducanturque radii inter se paralleli CB, be', ce'', de''' : omnes hi circuli cum arcibus $AB, Ae', Ae'', Ae''' \dots$ qui eundem angulum α continent, coincidunt in chordam $Ae''B$ maximi eorum. — Nam triangulum rectilineum CAB est locus geometricus omnium triangulorum sibi similium, qui formantur per lineas parallelas lineae BC , nempe lineas $eb, e''c, e'''d$; ergo etiam dictorum arcuum, qui continent eundem angulum α ; et sunt omnia haec triangula aequierura ad vertices $C, b, c, d, \dots$

Fig. 61.

Et si sumatur arcus anguli majoris quam angulus α , erit ejus finale punctum infra et citra dictam chordam $Ae''B$; si vero anguli minoris $< \alpha$, supra et trans hanc chordam, uti hoc factum est figura 61, circulo radii cA , arcibus $Af < \alpha$, et $Ag > \alpha$.

§. 146. Si versicurve abc inde a puncto a curvaturam continuo aut minuit aut auget (fig. 62), apotomae ap et pb tangentialium $ap \dots$ et $pb \dots$ pro punctis versicurve a et b inaequales sunt, ita quidem ut ea, cujus punctum in curva ad minorem curvaturam est, sit major, ea vero, cujus punctum est ad majorem curvaturam, sit minor.

Fig. 62.

Sit e. gr. versicurve data abc , $am = \rho$ radius curvaturae ejus pro puncto a ; et fiat haec versicurve magis curva versus $\beta \dots b$: dico apotomas tangentiales ap , pb esse inaequales; nam si essent aequales, arcus $a\beta b$ circularis esset (§. 88) contra hypothesin. Ducatur versicurve chorda ab : dico angulum pba esse majorem angulo pab , ideoque lege trianguli apotomam ap angulo majori obstantem majorem apotomâ pb , quae minori angulo obstat. Hoc enim vel eo patet, quod arcus $a\beta b$ versus β , b magis curvatur, ergo versus b continuo majorem angulum flexûs in eadem arcûs longitudine (§. 62 et 63) continet. Vel etiam probatur strictissime per relationem polygonismorum rectorum identicorum et non identicorum eam, quam numeris 143 et 144 exposuimus. Quia nimirum limes polygoni identici est circulus, limes vero polygoni non identici est linea curva definita versiformis; si nimirum in utroque polygonismo latera fiant $= 0$, et angulus flexûs $\alpha = 0$. Jam cum, quod modo de apotomis versicurve enuntiavi, verum sit (§. 143 s.) de polygonismo non identico pro quovis valore anguli α et pro quovis valore laterum: sequitur, idem valere etiam de ejus limite, hoc est de versicurve.

Jam vero cum pb sit $< ap$, sequitur, punctum finale versicurve b cadere intra arcum circulem ad ejusque chordam ad ; si enim b caderet, uti punctum b' in chordam circulem ad , foret $pb' = ap$ (§. 145); et si adeo ultra hanc chordam caderet uti punctum b'' , esset ea adhuc major quam ap , quod utrumque, ex demonstratis (§. 145), impossibile est.

Fig. 63.

§. 147. Sit contra versicurve $a\beta b$ versus puncta $\beta \dots b$ continuo minus curva (figura 63), habeatque curvaturam puncto a aequalem cum circulo ade radii am , et sumatur versicurve arcus ab continens eundem angulum flexûs α , quem etiam continet arcus circularis ad : dico, apotomas ap , pb , esse inaequales, quia nimirum earum aequalitas non nisi in circulari arcu, ob ejus flexûs identitatem (§. 88) obtinet. Dico porro angulum pba esse $< pab$, ideoque apotomam $pb > apotomâ pa$; hoc enim immediate inde patet, quod arcus versicurve versus $\beta \dots b$ continuo minus curvae contineat minorem angulum flexûs in eadem arcûs longitudine (§. 62 et 63); vel etiam strictissime probatur ex relatione polygonismorum identicorum et non identicorum, quam nis. 143 s. exposuimus secundum legem limitum.

Jam vero cum pb sit $> ap$, sequitur, punctum finale versicurve b cadere extra chordam circulem ad satis prolongatam; si enim b caderet, uti punctum b' in chordam ad , foret $pb' = ap$ (§. 145), et si adeo caderet infra puncta p et b' citra hanc chordam, uti b'' , esset ea adhuc minor quam ap , quod utrumque uti demonstratum est (§. 145) fieri non potest.

Fig. 64.

§. 148. Si versicurve versus unam partem curvaturam auget, per puncta $a, \beta', \beta \dots$ quivis radius curvaturae pro punctis $\beta', \beta \dots$ minor est radio curvaturae initialis $am = \rho$ (fig. 64), et cadit curvaturae radii punctum centrale, uti μ , supra eam lineam normialem, in qua est radius curvaturae pro quolibet puncto antecedente versicurve, uti μ supra am .

Nam a curvatura circuli agb (fig. 64), radii am , exeat versicurve ramus $a\beta\beta$, quae curvaturam continuo augeat versus puncta $\beta'\beta$; et versicurve arcus $a\beta\beta$ contineat eundem angulum α , ac arcus circularis agb , ita ut angulus flexûs versicurve $p\upsilon f$ sit

aequalis angulo flexus pnb . Ducatur nunc chorda circularis ab : ergo (§. 146) punctum β cadit intra segmentum circulare $agb\delta a$; et linea βh facta parallela ad lineam bm est $>$ lineam ah , quia $\angle \beta ah$ est $>$ $\angle a\beta h$.

Ducatur jam circulus βc radio $\beta h = hc > ha$. Jam, cum, ex hypothesi, versicurve arcus $\beta\beta'a$ versus puncta $\beta' \dots a$ fiat continuo minus curvus: si linea βh , (quam fecimus $= hc$) esset radius curvaturae versicurve in puncto β , deberet versicurve, quoad dictum arcum inde a puncto β , circulum βc tota excurrere (§. 142). At ex constructione potius circulus βc excedit dictum versicurve arcum $\beta\beta'a$: ergo linea βh radius curvaturae pro versicurve puncto β esse non potest, quia pro hoc nimia est. Quare radius curvaturae pro puncto β potius est minor normali βh , ejusque punctum centrale μ supra punctum h .

Haec demonstratio de quantitate anguli flexus α non dependet, et eadem est pro $\alpha =$ cuivis valori finito.

§. 149. Si versicurve versus unam partem curvaturam minuit per puncta $a, \beta', \beta, \dots$, quivis radius curvaturae pro punctis β', β , major est radio curvaturae initialis am (fig. 65) et radii curvaturae punctum centrale, uti μ , cadit infra eam lineam normialem, in qua est radius curvaturae pro quolibet puncto antecedente versicurve, uti punctum μ infra am .

Nam si a curvatura circuli agb (fig. 65), radii am , exeat versicurve ramus $a\beta'\beta$, Fig. 65. quae curvaturam continuo minuat versus puncta β', β ; et versicurve arcus $a\beta'\beta$ contineat eundem angulum ac arcus circularis agb , ita ut angulus flexus versicurve $p\beta$ sit aequalis angulo flexus circulari pnb , et ducatur chorda circularis ab : ergo (ob §. 147) punctum β cadit extra chordam ab versus arcum circulare bd , et linea βh , facta parallela ad lineam bm , est minor lineam ah , quia $\angle \beta ah <$ $\angle a\beta h$. Ducatur nunc etiam circulus βc , radio $\beta h = hc < ah$. Jam cum ex hypothesi versicurve arcus $\beta\beta'a$ versus puncta $\beta', a \dots$ fiat continuo magis curvus; si esset linea $\beta h = hc$ radius curvaturae ejus in puncto β : deberet versicurve quoad dictum arcum inde a puncto β tota contineri intra circulare arcum βc (§. 146), ejusque punctum a deberet esse intra segmentum circulare $cg'\beta c$. At utrumque ex constructione non obtinet, secundum quam potius punctum a et totus versicurve arcus $\beta\beta'a$ est extra circulum $cg'\beta$: ergo linea βh radius curvaturae pro versicurve puncto β esse nequit, quia pro hoc nimium brevis est. Quare radius curvaturae pro puncto β potius major est normali βh , ejusque punctum centrale μ infra punctum h , id quod erat demonstrandum.

§. 150. Si linea versicurve curvaturam inde a puncto a ad punctum b continuo auget, arcus ejus ab est minor quam arcus homologus, (hoc est eundem angulum flexus continens) circuli curvaturae puncti a , sed major quam arcus homologus circuli curvaturae puncti b . Utrumque sequitur inde, quod versicurve, ubi fit continuo magis curva, continuo minorem arcum longitudinem pro eodem angulo continet (§. 62, s.).

§. 151. Quaeritur nunc, quomodo, data versicurve ab , ejusque quolibet puncto b , inveniatur radius curvaturae pro hoc puncto b ex aequatione functionali ea (§. 65 ss.), quae curvae naturam s. definitionem constitutivam (§. 21) methodo originaria (§. 66) perfecte exprimit.

Jam quaecunque sit haec expressio functionalis, ea habebit (§. 65) formam $Fl = fw$, sive etiam $l = \phi w$, et viceversa $w =$ functio reciproca functionis ϕw , ubi (§. 65) l et w denotant factores generales, subintelligunturque tacito unitates $\bar{1}$ et $\bar{1}$ (§. 65). Etsi denotent $p, q, r \dots$ factores constantes expressionibus functionalibus admixtos, poterit generaliter poni $l = \phi(w; p, q, r \dots)$. Ergo pro quovis puncto versicurve $l = \phi(w; p, q, r \dots)$, sive $w = f(l; p, q, r \dots)$ uti pro puncto b , invenietur definitus angulus $w \cdot \bar{1}$ pro definita longitudine $l \cdot \bar{1}$, quae in figurâ est longitudo arcûs inde ab initiali puncto longitudinum J , ubi $l = 0$; et viceversa; ubi notandum est, et w et l , pro functionis ϕ et f natura, plures valores quin et infinite multos, habere posse, sed eos omnes definitos et plane determinatos.

Sit ergo pro puncto b longitudo hypostatica arcûs versicurve $= L$, et angulus flexus hypostaticus ad eandem pertinens $= W$ (§. 84), et quaeritur curvaturae radius ad punctum b pertinens, et signetur per ${}^b\rho$.

Aucta ergo longitudine L per arcum $\pm bc$, qui notetur per $\pm \Delta L$, etiam mutabitur W per angulum aliquem β , qui est versus directionem fundamentalem RR' vel positivus vel negativus, et signetur per ΔW , eruiturque secundum naturam functionis assumptae aut $+\ bc$ aut $- bc$. Et viceversa, assumptâ $\pm \Delta W$, facto calculo, prodibit $\pm \Delta L$. Habebitur ergo ratio $\Delta L \dots \Delta W$, et valor $\frac{\Delta L}{\Delta W}$; et erit hic valor semper verus, utcunque magna vel parva assumantur incrementa aut decrementa $\pm \Delta L$ aut $\pm \Delta W$, adeoque si haec sumantur $= 0$ aut $= \infty$ (§. 37 coll. §. 130).

At si arcus $\pm bc = \pm \Delta L$ esset arcus circuli continens angulum $\beta = \Delta W$, esset hujus circuli radius (§. 99) $= \frac{\epsilon \Delta L}{\Delta W}$, utcunque magnus aut parvus sit arcus ΔL et angulus ejus ΔW ; ergo etiam, si ΔL esset $= 0$ aut ∞ . Si ergo versicurve inde a puncto b amplius prolongaretur aut contraheretur ita, ut exinde maneret aequaliter curva s. circulus, ea abiret in circulum cujus radius $\frac{\epsilon \Delta L}{\Delta W}$, quae expressio habebit pro quavis functione, versicurve naturam exprimente, formam $\frac{\epsilon p}{q}$, ubi p et q denotat, uti antea (§. 81), quoslibet factores; ergo erit ${}^b\rho = \frac{\epsilon p}{q} = \frac{\epsilon \Delta L}{\Delta W}$, et si $\epsilon = 1$ (positâ nempe unitate angulari $\bar{1} = 57,2957^\circ \dots$ (§. 99), erit (§. 100) ${}^b\rho$ simpliciter $= \frac{\Delta L}{\Delta W} = \frac{p}{q}$ (§. 99), quae expressio obtinet pro quavis magnitudine arcûs $bc = \Delta L$ et inde definiti anguli $\beta = \Delta W$; ergo etiam si ponatur $\Delta L = 0$, et proinde quoque $\Delta W = 0$.

Facto ergo $\Delta L = bc = 0$, quo etiam ΔW fit $= 0$, expressio analytica versicurve non minus dabit rationem determinatam pro $\Delta L \dots \Delta W = p' \dots q'$, ita ut pro hoc casu radius curvaturae pro puncto b sit $\frac{\epsilon p'}{q'}$, sive facto $\epsilon = 1$, $= \frac{p'}{q'}$. At hoc

sibi vult: si linea versicurve abc inde a puncto b continuaretur in modum circuli, cujus curvitatē habet in hoc puncto, hic circulus describendus esset radio $\frac{\epsilon p'}{q'}$. Sed ratio incrementorum aut decrementorum, quae prodit his incrementis aut decrementis positae $= \pm 0$, vocatur ratio differentialis s. limitalis eorundem, et scribitur $\frac{dL}{dW}$, unde tunc fit $\rho = \frac{\epsilon dL}{dW}$; sive, quia valores omnes hypostatici L et W comprehenduntur expressionē generali functionis versicurve, habebitur $\rho = \frac{\epsilon dl}{dw}$, sive pro puncto quovis generaliter $\rho = \frac{\epsilon dl}{dw}$, et facto $\epsilon = 1$, $\rho = \frac{dl}{dw}$.

§. 152. Jam vero, quum formula $\rho = \frac{\epsilon \Delta l}{\Delta w}$ pro quovis valore longitudinis arcus et per hanc dati anguli w , et simul pro quovis valore incrementorum aut decrementorum ΔL et ΔW vera sit: perspicuum est, si pro definito valore l arbitrario assumatur valor $\Delta l = \text{arcus } bc$, valorem $\rho = \frac{\epsilon \Delta l}{\Delta w}$ eo propius accedere ad valorem $\rho = \frac{\epsilon dl}{dw}$, quo minor assumtus erit arcus $bc = \Delta L = \Delta l$, adeoque simul quo minor erit angulus $\beta = \Delta W = \Delta w$. Si deinde accipiatur deinceps $\frac{1}{2} \Delta l$, $\frac{1}{3} \Delta l$, ..., $\frac{1}{z} \Delta l$, denotante z numerum integrum quantumlibet magnum, et calculentur radii curvaturae pro his valoribus, iidem continuo etiam magis ad valorem $\rho = \frac{\epsilon dl}{dw}$ accedent. Quod accidit adhuc celerius, si sumantur, denotante z numerum valde magnum, deinceps coefficientes $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, $\frac{1}{z^3}$, ..., $\frac{1}{z^{z'}}$, denotante etiam z' numerum valde magnum, proinde valores approximantes radii curvaturae $\frac{\epsilon \Delta l}{z \Delta w}$, $\frac{\epsilon \Delta l}{z^2 \Delta w}$, $\frac{\epsilon \Delta l}{z^3 \Delta w}$, ..., $\frac{\epsilon \Delta l}{z^{z'} \Delta w}$.

§. 153. Pro valore quovis hypostatico L et W invenitur calculo valor hypostaticus radii curvaturae pro quavis longitudine L arcus definita, qui radius vocetur R , et exprimitur per $\frac{\epsilon dL}{dW}$, secundum magnitudinem arbitrario assumtam unitatum $\bar{1}$ et $\dot{1}$ (§. 32, §. 66), ab se invicem magnitudine non dependentium. Utcunque tamen hae unitates mutentur, et quam varius inde proveniat valor ϵ atque quam varia valoris $R = \frac{\epsilon dL}{dW}$ expressio, attamen valor ipse hypostaticus pro R inde mutari nequit, cum is pro quovis puncto rami vel unicus, isque a valorum $\bar{1}$ et $\dot{1}$ arbitraria magnitudine non dependens, esse possit, quia omnis curva pro quovis cujusvis rami singuli puncto unicam definitam habeat curvaturam. Sed hoc idem analytice ita elucet. Expressio $\rho = \frac{\epsilon dl}{dw}$ etiam designat functionem definitam anguli $\dot{1}$, nempe (§. 99) $\rho = \frac{\epsilon p'}{q'} \cdot \dot{1}$. Quodsi in termino ϵ ergo etiam in termino $\dot{1}$ loco $\dot{1}$ alia assumatur anguli unitas, quae sit pars

$\frac{r}{s}$ ta prioris, nempe $\frac{r}{s} \cdot \bar{i}$: habebitur $\rho = \left(57,2957^\circ \dots : \left(\frac{r}{s} \cdot \bar{i} \right) \right) \times \frac{p'}{q'} \cdot \frac{r}{s} \bar{i} = \left(57,2957^\circ \dots : \bar{i} \right) \times \frac{p'}{q'} \bar{i} = \frac{p'}{q'} \cdot \bar{i}$, sive, unitate, ut fieri potest et solet, subintellectâ, $\rho = \frac{p'}{q'}$. Eadem haec expressio recurrit, si ρ consideretur ut functio unitatis longitudinalis, quae deinde mutetur in $\frac{r}{s} \cdot \bar{1}$ loco $\bar{i}$; itemque si $\bar{i}$ et $\bar{1}$ mutantur simul.

Fig. 66.

§. 154. Si curva abc formam continuo mutans a puncto a versus puncta $b, c, \dots$ continuo fit magis curva, sed ab eodem puncto a versus alteram partem, nempe versus puncta $b', c', \dots$ continuo minus curva: tunc curvaturae radii versus $b, c, \dots$ sunt continuo supra normialem $am \dots$, in qua est radius curvaturae initialis puncti a (§. 148); itemque radii curvaturae ab a versus $b', c', \dots$ sunt continuo supra eandem normialem $am \dots$ (§. 149); ob positionem in praesenti figura 66 oppositam, respectu §. 149. Quare, si cogitetur radius curvaturae am puncti a versus $b, c, \dots$ continuo minui, et versus b', c' continuo augeri, dum arcus abc , et $ab'c'$ versus oppositas partes continuo crescunt: per puncta duo finalia m , et m' , continuo utrinque mutabilia, et quasi fluentia seu decurrentia formabitur linea curva definita $\dots m, m, m, m', m'', \dots$, cujus directio initialis, DD' , perpendicularis est in directionem RR' curvae primariae $\dots c'b'abc \dots$ puncti a , quae linea angulos flexus habet cum curva primaria $\dots c'b'abc \dots$ eosdem pro arcubus homologis, et cujus arcuum longitudo aperte dependet de functione radii curvaturae curvae abc , quae est $\frac{\epsilon dl}{dw}$. Quaeritur ergo, quomodo longitudo hujus derivatae curvae $\dots m, m, m, m', m'', \dots$ inveniri possit ex functione $\frac{\epsilon dl}{dw}$, nempe radii curvaturae curvae primitivae, quae ipsa dependet de functione $l = \varphi(w; p, q, r \dots)$ sive $w = f(l; p, q, r \dots)$.

Linea ea, quae de puncto finali continuo fluente curvaturae radii alicujus curvae derivatur, hujus vocatur linea evoluta, et linea primitiva, de qua dicto modo dependet ejus evoluta, hujus vocatur evolvens, s. linea fundamentalis; quae designetur per l et w , evoluta vero per l_{-1} et w (cum angulus flexus utrique communis sit). Linea ergo evoluta l_{-1} ita est comparata, ut radii omnes curvaturae lineae l sive l_0 sint ejus tangentiales lineae. Quodsi in puncto aliquo m linea l_0 habeat curvaturam infinitam, itaque ${}^m\rho = 0 = \frac{\epsilon dl}{dw}$, proinde cum ϵ non possit esse $= 0$, erit $\frac{dl}{dw} = 0$, habebunt lineae l_0 et l_{-1} hoc punctum m inter se commune. Crescente vero lineâ l_0 , et crescente $\rho = \frac{\epsilon dl}{dw}$, linea l_{-1} decrescit, decrescente vero ρ eadem crescit. Et quidem ex incrementorum aut decrementorum continuitate sequitur, lineam l_{-1} in eadem ratione ac radium curvaturae aut crescere aut decrescere, ut, si viceversa exeatur de linea evoluta l_{-1} : eadem cogitetur quasi evolvi ita, ut simul pars evoluta fiat recta, et quidem fiat curvaturae radius evolventis lineae, pro punctis hujus continuo succedentibus, quae linea sive radius sit continuo in evolutam tangentialis, in evolventem vero normalis; et ut punctum evolutae continuo fluens det lineam evolventem l_0 .

Exinde sequitur lineam quamvis evolutam exprimi per functionem $l_{-1} = \rho = \frac{\epsilon dl}{dw}$.

Quod si ρ fiat continuo major per $+dl$, evoluta evolvitur, sin vero ρ fiat continuo minor per $-dl$, evoluta involvitur; uti (figura 67) evoluta adc a puncto a usque ad punctum d evolvendo dat lineam l_{-1} , hoc est arcum ab , sed pars evolutae dc inde a puncto d continuo involvendo, dat partem bc lineae abc ; et si recta ea sit tangentialis in punctum a , atque $cf = gb = ea$ tangentialis in punctum c , et simul cum curva adc evolvatur, orietur evolvens linea egf . Fig. 67.

§. 155. Uti linea evoluta l_{-1} dependet de linea primaria l_0 seu l , ita de linea l_{-1} dependet ea linea, quae evolutione lineae l_{-1} orta cogitari potest, quam igitur vocabimus evolutam evolutae l_{-1} primam, lineae vero l_0 evolutam secundam, ideoque eandem signabimus per l_{-2} . Uti igitur l_{-1} est $= \frac{\epsilon dl}{dw}$, ita l_{-2} est $= \frac{\epsilon dl_{-1}}{dw}$; nam (153) angulus w flexûs pro tribus lineis l_0 , l_{-1} , et l_{-2} idem est, sed linea fundamentalis RR' pro quavis sequenti evoluta angulo recto differt a directione fundamentali evolutae proxime praecedentis, uti figura 68 monstrat lineis RR' , DD' , EE' . Sed cum l_{-1} sit $= \frac{\epsilon dl}{dw}$ Fig. 68.

erit ergo $l_{-2} = \epsilon d \left(\frac{\epsilon dl}{dw} \right) = \frac{\epsilon^2 d^2 l}{dw^2}$. Similiter evoluta lineae l_{-2} , quam notabimus per l_{-3} , erit evoluta prima lineae l_{-2} , secunda lineae l_{-1} , tertia lineae l_0 ; et invenietur $\frac{\epsilon dl_{-2}}{dw} = \frac{\epsilon^2 d^2 l_{-1}}{dw^2} = \frac{\epsilon^3 d^3 l}{dw^3}$, et sic porro, nisi forte pro natura functionis constitutivae pro linea l_0 , nempe functionis $l_0 = \varphi(w; p, q, r \dots)$ (§. 65), habeat quaedam ex hac evolutarum serie, $\frac{\epsilon^2 d^2 l}{dw^2}$ formam $l_{-2} = \frac{\epsilon^2 p}{q} w$, quae est aequatio circuli. Nam hoc casu $(z + 1)$ ta evoluta curva non datur, quia circuli $l = \frac{\epsilon^2 p}{q} w$ evoluta est $= \frac{\epsilon p}{q}$, hoc est linea recta constans, cujus revolutione s. gyratione, ceu radii, oritur circulus $\frac{\epsilon^2 p}{q} w = l_{-2}$.

§. 156. At similiter linea etiam primitiva l_0 seu l potest considerari ut evoluta, et quaeri ejus evolvens, sive ea linea, qua evolvendâ l_0 oritur, et signabitur per l_1 . Erit ergo $l_0 = \frac{\epsilon dl_1}{dw}$; proinde $dl_1 = \frac{l_0 dw}{\epsilon}$; ergo integrando, $l_1 = \frac{1}{\epsilon} \int l_0 dw + \text{constans}$; ubi l_1 est functio w . Haec vero functio w poterit utique per calculum integram inveniri, nisi id praesentes hujus disciplinae vires forte superet.

Similiter et evolventis evolvens, seu l_2^1 , seu evolvens secunda lineae l_0 calculo integrali ex evolvente prima inveniri potest, et sic pro quavis linea recta aut curva in infinitum. Nam rectae lineae a evolvens est circulus $l = aw$ (secundum methodum polarem), hujus evolvens est $= \frac{a}{\epsilon} \int w dw = \frac{aw^2}{2\epsilon} + \text{constans}$, $= l_2$ (coll. §. 159), unde invenitur rectae a evolvens tertia, quarta, ..., et sic porro sine fine.

§. 157. Si igitur detur quaedam linea versicurve $l = \varphi(w; p, q, r \dots)$ seu $w = f(l; p, q, r \dots)$, ope calculi differentialis et integralis inveniri potest series et evolutarum et evolventium ejusdem; quae duae series simul sumtae constituunt unam

74 §. 157. *De lineae curvae proprietatibus et symptomatibus generalioribus.*

seriem integram linearum devolutoriarum lineae l seu l_0 , cujus unus terminus, isque medius, est linea l_0 ipsa. Hoc ergo devolutoriarum linearum systema signabitur per

$$\dots l_{-3}, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_{+1}, l_{+2}, l_{+3}, \dots$$

ejusque series plurimis casibus a linea l_0 utrinque infinita est; sed tamen unico hoc casu versus partem evolutarum finita abrumpitur, si nimirum una evolutarum, aut l_0 , aut l_{-1} , aut l_{+1} sit circulus, cujus evoluta est linea recta, hujus vero evoluta nulla. Lineae l_{+1} possunt vocari lineae l_0 evolutoriae; lineae l_{-1} vero eodem respectu lineae involutoriae nominari queunt.

Specimen quartum.

De circuli linea evoluta atque evolvente.

Specimen parvum.

De circuli lineis evolutis etque evolvente.

§. 158. In circulo ejus radius exponit continuo immutabilem ejus curvaturam, hoc est radius circuli est radius curvaturae constans $= \frac{\epsilon P}{q}$ (§. 100) $= \frac{\epsilon dl}{dw}$ (§. 151), sive pro circuli aequatione fundamentali $l = aw$, radius est $= \epsilon a$. Sive: circulus oritur revolutione radii circum centrum perpetuâ. Et cum $d \cdot \frac{P}{q}$ sit $= 0$; sequitur posteriores evolutas pro circulo non dari.

§. 159. Alia res est, si quaerantur circuli lineae evolventes $l_1, l_2, l_3, \dots$ (§. 155 — §. 157). Angulus circuli w est omnibus ejus evolventibus communis; evolutio vero fieri potest a quovis puncto circuli, cum omnia puncta peripheriae se indifferenter habeant ad totam peripheriam ob curvaturae aequalitatem.

Per ea vero, quae supra generaliter sunt demonstrata (coll. §. 153, §. 154, et §. 156) est linea quaevis $l = \frac{\epsilon dl_1}{dw}$; ergo cum l sit circulus, est $\frac{P}{q}w = \frac{\epsilon dl_1}{dw}$, proinde $\epsilon dl_1 = \frac{P}{q}w dw$, ergo $dl_1 = \frac{P}{\epsilon q}w dw$, ergo integrando $l_1 = \frac{P}{2\epsilon q}w^2 + \text{constans}$. Facta igitur constante $= 0$, hoc est, facta evolutione circuli immediate ex quolibet peripheriae puncto J' (figura 69): erit evolvens circuli prima $l_1 = \frac{P}{2\epsilon q}w^2$; atque si Fig. 69.

brevitatis causa loco $\frac{P}{q}$ scribatur a , (§. 100) erit $l_1 = \frac{a}{2\epsilon}w^2$; facta denique unitate angulari $i = 57^\circ, 295779$ (§. 124) ergo $\epsilon = 1$, habebitur $l_1 = \frac{a}{2}w^2$. Ergo linea circuli evolvens prima ad secundum linearum originaria methodo constructarum gradum algebraicum pertinet (§. 65).

§. 160. Ex hac evolventis circuli aequatione fundamentali sequitur ejus w^2 esse $= \frac{2l_1}{a}$, igitur $w = \frac{\sqrt{2}\sqrt{l_1}}{\sqrt{a}}$. Simulque perspicitur l_1 esse essentialiter positivum, quia w^2 pro $\pm w$ positivum est. Pro $w = \pm 0$ etiam l_1 est $= \pm 0$; hoc est, $\pm l_1 = \pm 0$ est limes et positivae et negativae constructionis (§. 133, nota). Pro $w = \pm \infty$, est $l_1 = \pm \frac{a}{2}\infty^2$. Ergo curva inde a valore ± 0 , longitudine positiva utrinque a puncto J' (fig. 69) continuo crescente, duo brachia exhibet utrinque positiva, crescentia sine fine versus valorem $\pm \infty$. Fig. 69.

Jam cum $\pm w$ a valore $= \pm 0$ sine fine crescat, sequitur, utrumque hujus evolventis brachium inde a puncto J' infinitoties revolvi. Et cum w crescat in ratione dimidiata longitudinis l_1 , radix vero quadrata continuo crescens ad quadratum suum adsciscat rationem continuo sine fine minorem, sequitur w ad l_1 fieri semper minorem, ergo curvitatē evolventis sine fine minui (§. 62, s.). Et quidem, si e. gr. longitudo primi circuitus fuerit $= 1$, erit longitudo duorum circuituum $= 4$, trium $= 9$ et generaliter z circuituum $= z^2$. Quin etiam assumpta unitate generali qualibet, si et ea longitudo quae pertinet ad $w = i$ dicatur $\bar{1}$, pro angulis $= 1, 2, 3, \dots$ series longitudinum ad angulos seriei prioris pertinentium erit $= 1, 4, 9, 16, \dots$

§. 161. Jam vero cum utrumque evolventis brachium curvitate continuo imminuta infinitoties, idque symmetrice, circumvolvatur: sequitur in hac curva adesse suisectiones

(§. 52) numero dupliciter infinito, idque et supra et infra punctum initiale J' , quod ipsum ob $\pm l_1$ pro $\pm w$, et ob $\pm l_1 = \pm 0$ conjunctum cum $w = \pm 0$, erit punctum cuspidis (§. 48). Simulque per lineae hujus inde a puncto initiali J' perfectam ad lineam tangentialem initialem $R''R'''$ symmetriam colligitur, omnia haec suissectionis curvae puncta t', t'', t''' etc. et t, t, t, t , etc. esse in eadem hac linea $R''R'''$, quae igitur hoc respectu vocabitur linea directrix diametralis curvae (§. 18), cujus directio a directione tangentis circularis hujus puncti J' distat angulo $\pm 90^\circ$; ita ut per totam constructionem ad $\pm w$ pertineat lineae evolventis w , nempe $w_1 = \pm (w_0 \pm 90^\circ)$. Unde jam patet eam curvae formam esse, quae fig. 69 exhibetur.

Fig. 69.

§. 162. Ex aequatione evolventis circuli constitutiva $l_1 = \frac{a}{2\varepsilon} w^2$, pro formâ ejusdem accuratius construenda, sequuntur hi valores principales:

l (circulus)	l_1	$\pm w$ (evolventis, relatus ad directionem fun- damentalem evolven- tis ipsius)	$\pm w$ (circuli)
$\varepsilon a w$	$\frac{a}{2\varepsilon} w^2$	$\frac{\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{a}} \sqrt{l_1}$	$\pm \frac{1}{\varepsilon a}$
± 0	$\pm 0^2$	± 0	± 0
$\pm \varepsilon a$	$\pm \frac{a}{2\varepsilon}$	± 1	± 1
$\pm \varepsilon a^2$	$\pm \frac{a^3}{2\varepsilon}$	$\pm a$	$\pm a$
$\pm \varepsilon$	$\pm \frac{1}{2\varepsilon a}$	$\pm \frac{1}{a}$	$\pm \frac{1}{a}$
$\pm \varepsilon a \infty$	$\pm \frac{a}{2\varepsilon} \infty^2$	$\pm \infty$	$\pm \infty$
$\pm \varepsilon a \sqrt{\infty}$	$\pm \frac{a}{2\varepsilon} \infty$	$\pm \sqrt{\infty}$	$\pm \sqrt{\infty}$
$\pm \varepsilon^2 a$	$\pm \frac{a\varepsilon}{2}$	$\pm \varepsilon$	$\pm \varepsilon$
$\pm \varepsilon a \sqrt{\varepsilon}$	$\pm \frac{a}{2}$	$\pm \sqrt{\varepsilon}$	$\pm \sqrt{\varepsilon}$
± 1	$\pm \frac{1}{2\varepsilon^3 a}$	$\pm \frac{1}{\varepsilon a}$	$\pm \frac{1}{\varepsilon a}$
$\pm a$	$\pm \frac{a}{2\varepsilon^3}$	$\pm \frac{1}{\varepsilon}$	$\pm \frac{1}{\varepsilon}$
$\pm \frac{1}{a}$	$\pm \frac{1}{2\varepsilon^3 a^3}$	$\pm \frac{1}{\varepsilon a^2}$	$\pm \frac{1}{\varepsilon a^2}$
± 0	± 0	± 0	± 0
$\pm \varepsilon^2 \sqrt{a} \sqrt{2}$	± 1	$\pm \frac{\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{a}}$	$\pm \frac{\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{a}}$

§. 163. Ex hac tabula adhuc sequentes evolventis circuli perspiciuntur proprietates.

Cum angulus relativus w unacum longitudine l_1 inde a valore $= 0$ usque in infinitum crescat, pro hac simplicissima hujus evolventis formula, anguli ad l_1 pertinentes relativi s. finales (§. 65 s.) iidem sunt cum angulis arcualibus seu internis (§. 44, §. 72).

Et cum brachia duo hujus evolventis utrinque sine fine curvitate symmetrice sine fine decrescente crescunt longitudine, elucet: praeter cuspidale punctum initii (§. 161) aliud punctum characteristicum hypostaticè expressum (§. 45 — §. 48) non dari. Puncta vero suisectionis alternatim supra lineam diametralem et subter eandem (§. 161) non nisi secundario respectu punctis charactericis hypostaticis adnumerari possunt.

Cum evolventes circuli non nisi per constantem factorem $a = \frac{p}{q}$, uti et circuli omnes, differant, sequitur omnes evolventes, uti et circulos (§. 87) inter se similes, hoc est sola quantitate diversas esse.

§. 164. Cum haec linea evolvens habeat aequationem fundamentalem assurgentem ad secundum gradum algebraicum saltim unius variabilis w , ea est inter lineas curvas originarias secundi gradus vel ordinis algebraici; et quidem una e simplicissimis duabus, quae sunt $l = \alpha w^2$ et $w = \alpha l^2$ (§. 65). Equidem has duas secundi gradus simplicissimas voco parabolas originarias, et quidem priorem per $l = \alpha w^2$ constitutam parabolam originariam angularem, quae posito $\alpha = \frac{a}{2\epsilon} = \frac{p}{2\epsilon q}$ est evolvens circuli $l = \frac{p}{q} w$; alteram vero per aequationem $w = \alpha l^2$ datam parabolam originariam longitudinarem, quae habet formam ab evolvente circuli plane diversam.

§. 165. Quamquam originaria hujus curvae et expressio analytica et constructio, a me jam ante hos triginta annos inventa, quantum scio, Geometris adhuc ignota fuerit, tamen haec linea ipsa non omnibus plane incognita fuit, cum de eadem nonnulli inter alios *Lacroix* *) et *Brandes* **), ut de circuli evolvente, methodo coordinatiya rectilinea, breviter egerint. Ego vero hanc lineam consulto atque directe inveni, longe antequam horum virorum libri et scripti et mihi noti fuerint.

§. 166. Uti evolvens circuli l_1 inventa est ex $l = \frac{p}{q} w$, ita deinceps evolvens evolventis sive, l_2 , et l_3 , l_4 , ... sine fine inveniuntur. Nam l_1 est $\frac{\epsilon dl_2}{dw}$; ergo $\frac{aw^2}{2\epsilon}$

*) Vid. *Lacroix traité du calc. diff. et int.* T. I, p. 499.

**) Vid. *Brandes Lehrbuch der höheren Geometrie.* 2. B. §. 63.

$= \frac{\varepsilon dl_2}{dw}$; proinde $dl_2 = \frac{aw^2}{2\varepsilon^2} \cdot dw$; ergo integrando erit $l_2 = \frac{aw^3}{2 \cdot 3 \cdot \varepsilon^2} + c''$, quae constans c'' iterum poterit esse $= 0$, si secundae evolutionis initium sit cum J' et J in eodem puncto. Sed circuli evolventes posteriores considerandi hic non locus est.

Et cum brachia duo huius evolventis utriusque sine hac evolvitae symmetrica sine lineae evolvitae crescunt longitudine, elucet: praeter cuspidale punctum (p. 165) aliud punctum characteristicum hypostaticum (p. 45 - 46) non dari. Punctum vero evolvitae alterationis super lineam ducuntur et subter eandem (p. 165) non nisi secundario respectu punctis characteristicis hypostaticis adhaerere possunt.

Cum evolventes circuli non nisi per constantem factorem $a = \frac{p}{r}$, ut et circuli omnes, differant, sequitur omnes evolventes, ut et circulos (p. 87) inter se similes, hic est sola quantitate diversae esse.

§. 164. Cum haec linea evolvens habeat aequationem fundamentalem assurgentem ad secundum gradum algebraicum saltem unius variabilis w , ea est inter lineas curvas originarias secundi gradus vel ordinis algebraici; et poitem una e simplicissimis duabus, quae sunt $l = arw$, et $w = a^2 l$ (p. 65). Eundem has duas secundi gradus simplices sines vero parabolas originarias, et poitem poitem per $l = arw$ constituantur parabolam originariam angularem, quae poitem $a = \frac{p}{2r}$ est evolvens circuli $l = \frac{p}{2r} w$; aliam vero per aequationem $w = a^2 l$ datam parabolam originariam longitudinalem, quae habet formam ab evolvente circuli plane diversam.

§. 165. Quamquam originaria huius curvae et expressio analytica et constructio a me iam ante hos triginta annos inventa, quantum scio, Geometriae adhuc ignota fuerit, tamen haec linea ipse non omnibus plane incognita fuit, cum de eadem nonnulli inter alios Lacroix (*) et Brander **) ut de circuli evolvente, methodo coordinatarum rectarum, breviter egerint. Ego vero hanc lineam consulo atque directe inveni, longe antequam horum virorum libri et scripta et mihi noti essent.

§. 166. Un evolvens circuli l , inventa est ex $l = \frac{p}{2r} w$, ita deinceps evolvens evolvens sive l_2 , et l_3 , ... sive lineae invicem. Nam l_1 est $\frac{dl_2}{dw}$; ergo $\frac{dl_3}{dl_2} = \frac{aw^2}{2\varepsilon^2}$.

*) Vid. Lacroix traité du calc. diff. et int. T. I. p. 499.

**) Vid. Brander Lehrbuch der höheren Geometrie. 2. B. §. 63.

Specimen quintum.

De linea Antiloga.

Specimen quintum.

De linea Antilogia.

5

§. 167. Ut in circulo arcuum longitudo et anguli magnitudo in eadem ratione vel simul crescunt vel decrescunt: similiter quaeritur, utrum detur linea in qua, si arcus definita ratione crescant, anguli contra in eadem ratione decrescant. Si ergo ad arcum definitum l pertineat angulus w , et sit alius arcus longitudo l' , angulus vero w' , et si sumatur $l \dots l' = 1 \dots m$, foret contra $w \dots w' = m \dots 1 = 1 \dots \frac{1}{m}$, e. gr. pro $l \dots l' = 1 \dots 3$, foret $w \dots w' = 3 \dots 1 = 1 \dots \frac{1}{3}$.

Hoc vero in spatio fieri potest, quia longitudo et angulus sunt quantitates continuæ. Si enim $l \dots l' = 1 \dots 1$ erit quoque $w \dots w' = 1 \dots 1$. Si m fuerit > 1 erit $l' > l$, sed contra $w' < w$. Quo major ergo l' , eo minor est w' . Si $m < 1$ erit $l' < l$, at contra $w' > w$. Quo minor ergo fit l' , eo major erit w' . Si $m = 0$, itaque $l' = 0$ erit contra $w' = \frac{1}{0} = \infty$; sin autem $m = \infty$, erit $l' = \infty$, sed $w' = \frac{1}{\infty} = 0$.

§. 168. Ex his sequitur, si arcus inter se collati sumantur inde ab eodem puncto initiali J ubi $l = 0$, et anguli iisdem arcubus adtinentes secundum unam eandemque directionem RR' , esse generaliter duos arcus quoslibet in ratione reciproca ejus rationis in qua sunt anguli ad eosdem arcus pertinentes; hoc est $l \dots l' = w' \dots w$. Nam si l' sit $= m l$, erit $w' = \frac{w}{m}$ ex proportionem $1 \dots m = \frac{1}{m} \dots 1$; quin etiam $lw = l'w'$, eo sensu, qui supra (§. 65 et 66) explicatus fuit.

Si ergo omnes l ad eandem unitatem longitudinarem $= \bar{1}$ referantur, et omnes w ad eandem unitatem angularem $= \bar{1}$; et si hae unitates simul pertineant ad unum idemque punctum: tunc erit cujusvis arcus longitudo l inde a puncto initiali J , ad unitatem longitudinarem expressa, multipulum reciprocum ejus multipli, quod est angulus w ad eundem arcum pertinens inde a directione RR' , ad unitatem angularem expressus. Nam si arcus is, cujus longitudo est $= \bar{1}$ est idem arcus, cujus directio in puncto finali facit cum directione fundamentali RR' angulum $= \bar{1}$, tunc erit, quia generaliter $l \dots l' = w' \dots w$, etiam $\bar{1} \dots m \dots \bar{1} = \frac{\bar{1}}{m} \dots \bar{1}$; ideoque etiam $lw = l'w' = 1$.

Quae proprietas simplicissime ita exprimi potest, ut l et w spectentur ut continuo variabiles, et loco $l \dots \bar{1}$ et $w \dots \bar{1}$ brevitatis causa scribatur l et w , unitatibus subintellectis. Quo facto conditio, pro hac curva requisita, exprimitur per $l = \frac{1}{w}$, sive $\bar{1} \dots$

$$l \bar{1} = \bar{1} \dots \frac{\bar{1}}{w}.$$

§. 169. Ut vero secundum hanc conditionem construaturs curva, sequentia (conferatur §. 65 et 66) assumenda sunt in spatio:

- a) punctum initiali J , unde longitudines arcuum inde a valore $= 0$ exeant;
- b) directio fundamentalis RR' atque plaga secundum quam anguli inde ab hac directione exeuntes sint aut positivi aut negativi;
- c) unitas arbitraria longitudinalis $= \bar{1}$;
- d) unitas arbitraria angularis $= \dot{1}$;
- e) denique etiam ex his datis formandus est arcus longitudinis $= \bar{1}$, qui flexu secundum curvae legem facto in puncto suo finali cum directione fundamentali faciat angulum $= \dot{1}$; quia nimirum positum est, unitatem longitudinarem et angularem ad eundem arcum pertinere.

Nunc fiat constructio secundum proportionem

$$(\alpha) \quad \bar{1} \dots l\bar{1} = w\dot{1} \dots \dot{1} \text{ sive } \bar{1} \dots l\bar{1} = \dot{1} \dots \frac{\dot{1}}{w} \dots (\alpha)$$

vel secundum aequationem inde repetitam

$$(\beta) \quad l\bar{1} = \frac{\bar{1} \cdot \dot{1}}{w \cdot \dot{1}}, \text{ sive } w\dot{1} = \frac{\bar{1} \cdot \dot{1}}{l \cdot \bar{1}} \dots \text{ sive unitatibus subintellectis } l = \frac{1}{w}, \text{ vel } w = \frac{1}{l} \dots (\beta)$$

§. 170. His ergo suppositis, cum valores l et w sint aut simul positivi aut simul negativi,

$$\text{pro } l = \pm 0 \text{ erit } w = \pm \infty$$

$$\text{pro } l = \pm 1 \text{ erit } w = \pm 1$$

$$\text{pro } l = \pm 2 \text{ erit } w = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{pro } l = \pm 3 \text{ erit } w = \pm \frac{1}{3}$$

$$\text{pro } l = \pm m \text{ erit } w = \pm \frac{1}{m}$$

$$\text{pro } l = \pm \frac{1}{2} \text{ erit } w = \pm 2$$

$$\text{pro } l = \pm \frac{1}{3} \text{ erit } w = \pm 3$$

$$\text{pro } l = \pm \frac{1}{m} \text{ erit } w = \pm m$$

$$\text{pro } l = \pm \infty \text{ erit } w = \pm \frac{1}{\infty} = \pm 0.$$

Fig. 70. His conditionibus satisfacit constructio figurae 70. Quod ut intelligatur, omnes omnium punctorum lineae tangentiales referri debent ad directionem fundamentalem RR' , omnesque arcus exire cogitandi sunt ex puncto communi initiali J , idque utrinque aut positiva aut negativa longitudine, quo fiunt tangentialium cum directione fundamentali anguli aut positivi, uti angulus aNR , aut negativi ut $a'N'R'$. Ex his nunc primariae hujus curvae proprietates elucent.

Quoniam pro $l = \pm 0$, hoc est pro puncto initiali J , w est $= \pm \infty$, et pro puncto a aut a' , ubi arcus Ja longitudo est $= +1$, arcus vero Ja' longitudo est

$= -1$, habetur quoque angulus aut $aNR = +1$ aut $a'N'R' = -1$: debet ergo arcus $+Ja$ cogitari infinities positive, arcus vero $-Ja'$ negative circumgyrasse, usquedum longitudinem aut positivam $Ja = +1$, aut negativam $Ja' = -1$ in punctis a aut a' , idque ita, ut angulus aNR sit $= +1$ angulus vero $a'N'R' = -1$. Ergo haec curva habet punctum initiale J , circum quod utrinque infinities circumgyrat; quod igitur vocari potest ejus centrum, quod signetur per M . Jam cum pro $l = \pm \infty$ sit $w = \pm 0$; sequitur, si ramus positivus Jab positive cogitetur continuari sine fine, cogitatum esse, eundem sine fine appropinquare ad directionem fundamentalem positivam RR' ; similiterque ramum negativum $Ja'b'$ negative sine fine continuatum appropinquare sine fine ad directionem fundamentalem $R'R$ negativam. Et quidem, si $Jb = 2Ja = 2$ (quia Ja posuimus $= +1$) erit angulus $+bNR = +\frac{1}{2}$ ang. $aNR = \frac{1}{2}$ (quia $\angle aNR$ positus est $= 1$); pro $+l = +Jc = +3$, erit $+w = +\frac{1}{3}aNR = +\frac{1}{3}$, et generatim pro $+l = +m$ erit $+w = +\frac{1}{m}$, uti aequatio curvae id postulat. Similiter pro $-l = -Jb' = -2$ erit $-w = -b'N'R' = -\frac{1}{2}$; pro $-l = -Jc' = -3$ erit $-w = -c'N'R' = -\frac{1}{3}$ et generatim pro $-l = -m$ erit $-w = -\frac{1}{m}$.

Unde simul infertur, curvam si progreditur ea ab J aut positive per puncta $a, b, c, \dots$ aut negative per puncta $a', b', c', \dots$, in eadem longitudine continuatâ continuo minorem angulum aut positivum aut negativum continere, si vero cogitetur versus oppositas partes aut per puncta $\dots c, b, a \dots$, vel per puncta $\dots c', b', a'$ ad centrum J regredi, eam continuo majorem angulum aut positivum aut negativum arcubus subsequentibus deinceps positus (§. 44) continere; hoc est (§. 60, 62 ss.): curvam inde a punctis $J, a, b, c, \dots$ aut a punctis $J, a', b', c' \dots$ semper minus curvari, sed a punctis $\dots c, b, a, J$ aut $\dots c', b', a', J$ semper magis curvari.

Quo concluditur, in hac curva aequalibus longitudine arcubus deinceps positus inaequales angulos competere; nisi hi arcus uterque inde a puncto initiali J oriantur, quo in casu duo quilibet arcus sunt in se spectati et quoad longitudinem et quoad angulorum magnitudinem plane aequales, neque per aliud nisi per angulorum oppositivam constructionem seu relationem oppositivam ad directionem fundamentalem diversi. Quin simul infertur, duorum arcuum quorumlibet, qui ex centro J non exeunt utrique, deinceps positorum, quorumque anguli sint aequales, longitudes esse diversas.

Ex aequatione fundamentali (α) et (β), et ex constructione curvae per eandem, elucet curvae hujus natura plane symmetrica ad punctum initiale J et ad directionis fundamentalis lineam RR' ; quae quidem (ut n. 66 jam notavimus) per lineas parallelas exponenda est ubique in toto curvae plano.

Cum haec curva inde a centro infinities circumvolvatur, sequitur eandem in infinite multis punctis habere directionem fundamentalem, in quibus punctis linea tangentialis parallela est lineae RR' . Unitas quidem angularis $= 1$ magnitudine absolutâ plane arbitraria est; ergo ea poterit esse < 180 gradibus, uti in figurâ 71. In hoc casu brachium curvae $+Jab$ extenditur quidem inde a puncto a adhuc infinita magnitudine, sed eandem cum RR' directionem denuo habere non potest, quia crescente hoc brachio angulus aNR sine fine decrescit, sed valorem $= +0$ adtingere nusquam potest. Sed si idem brachium Ja cogitatur inde a puncto a decrescere per puncta $b, b'',$ utut parva

Fig. 71.

fuerit unitas angularis, angulus tangentialis lineae cum directione fundamentali RR' continuo crescens pro definito puncto curvae b_m fiet $= 180^\circ$, deinde 360° , porro $3 \cdot 180^\circ$, $2 \cdot 360^\circ$, ... $n \cdot 180^\circ$; hoc est, linea curvae tangentialis fit pro $w = 180^\circ$ parallela directioni $R'R$, deinde pro $w = 360^\circ$ parallela directioni RR' , porro pro $w = 3 \cdot 180^\circ$ parallela directioni $R'R$, et sic porro sine fine. Idem accidit, si i sit deinceps $= 180^\circ$, $> 180^\circ$ sed $< 2 \cdot 180^\circ$, $2 \cdot 180^\circ$, $> 2 \cdot 180^\circ$ sed minor $3 \cdot 180^\circ$, et sic porro. Utut ergo i assumatur, haec curva infinities habet directionem lineae RR' directae, infinities quoque directionem lineae ad RR' contradirectae, sive lineae $R'R$; sed inde ab eo puncto ubi $w = m \cdot i = 180^\circ$, brachium positivum Jb non amplius directionem $R'R$ aut RR' habere potest. Plane idem obtinet brachio negativo $Ja'b'$...

Fig. 72.

§. 171. Jam cum in hac curva inde a quovis puncto s (fig. 72) pars sJ sit finita longitudine, sed infinitum angulum contineat, altera vero pars ejusdem brachii, quae a puncto s infinite extenditur, infinita sit longitudine at angulum finitum contineat eum, quem linea recta tangentialis puncti s facit cum linea directionis fundamentalis RR' : poterit ergo dici angulus finitus quilibet auv , quem continet brachii positivi pars infinita seu arcus infinitus sN , essentialiter conjunctus esse cum arcu finito deinceps posito sM , qui ipse angulum in se habet infinitum. Hoc est, in aequatione fundamentali $l = \frac{l}{w}$ angulus w non significat eum angulum, quem continet arcus ipse l , qui respondet arcui Ms , sed potius eum angulum, quem continet arcus ipsi contiguus infinitus, qui respondet arcui sN . Quod inde fit, quia, secundum methodum nostram originariam curvarum, non consideratur angulus arcus cujuslibet internus, sed potius cujusvis arcus directio terminalis s. finalis, sive angulus, quem cujusvis arcus linea tangentialis recta finalis conficit cum directione definita fundamentali RR' ; (uti exposuimus hoc numeris 64 — 67).

§. 172. Si ergo (figura 70) in hac curva arcus a puncto a , ubi longitudo arcus Ma est $= \bar{1}$, et magnitudo anguli tangentialis finalis $aNR = \bar{1}$, continuo prolongari cogitetur versus P , tunc cogitatus erit arcus infinitus continuo adpropinquans ad directionem RR' , seu ad anguli finalis valorem $= + 0$. Poterit ergo haec directio fundamentalis directio asymptotica vocari brachii infiniti positivi MaP . Neque tamen per hoc adstruitur, dari pro brachio positivo MaP lineam rectam directioni RR' parallelam definitam, quam ramus curvae MaP transgredi non possit, sed cum qua in eadem directione in infinito coalescat, quae ergo linea esset recta ad curvam asymptota; quam utrum curva haec habeat, nec ne, mox dijudicabitur (§. 189).

Jam vero uti se habet brachium positivum MaP ad directionem RR' , ita se habet brachium negativum $Ma'Q$ ad directionem contradirectam $R'R$: nam totam curvam inde a puncto centrali M utrinque plane symmetricam esse vidimus (no. 170, 171): Quia ergo pro positivis l curva circum punctum initiale J seu M circuitibus semper latioribus gyrat (ob curvitatem arcus inde a puncto centrali continuo deminutam, no. 169), ideoque semper altius versus P ascendit; similiterque ramus negativus $Ma'Q$ sine fine versus Q descendit: sequitur, ramum positivum et negativum se prima vice intersecare in quodam definito puncto T (fig. 70, 71). Et cum hoc intersectionis, inde ab P et Q primae, punctum, ob eorundem ramorum plenam similitudinem atque symmetriam, plane eandem positionem versus punctum M et versus lineam quamvis directioni fundamentali

Fig. 70, 71.

parallelam rectam habere debeat; si etiam ducatur recta MS in directionem fundamentalem perpendicularis: erit illud primae brachiorum curvae sectionis punctum T simul in ambobus brachiis atque in dicta perpendiculari. Sin enim minus, erit ergo hoc punctum, si jungatur MTS' , in directione ad RR' non perpendiculari, ergo esset inter M et directionem RR' non symmetrice positum, quod ob curvae symmetriam (§. 70, 71) fieri non potest.

Simili modo probatur, omnes et positivas et negativas curvae hujus circumvolutiones ex parte esse supra ex parte vero infra eandem lineam, quae est per centrum ad fundamentalem directionem perpendicularis, nempe lineam $LMTS$; adeoque hos ramos se infinites secare deinceps in punctis $T, T^I, T^{II}, T^{III}, T^{IV}, T^V$ (fig. 73) quae omnia sunt in dicta perpendiculari atque ita disposita ad punctum centrale M , ut alternatim sint ad unam vel alteram partem lineae LMS . Fig. 73.

§. 173. Circuli quidem rami duo quilibet oppositi (§. 93) in omnibus punctis se penetrant in directione per angulum latente 180 graduum opposita: sed in hac curva rami ejus duo infinita quidem numero puncta, sed omnia inter se discreta, (minime vero arcum ullum) habent inter se communia, quibus se angulo minore quam 180° intersecant; idque ita ut infinite multa talia puncta sectionis sint inter M et T , infinite multa vero alia exstant inter M et T^I . Attamen in centro M brachia curvae se secant aut potius se penetrant sub angulo latente 180 graduum, hoc est ita ut sectionis tangentes plane congruant, quia inde a puncto J longitudines arcuum sunt aut positivae aut negativae. Punctum ergo J seu M est punctum verticis curvae (§. 48).

§. 174. Haec tota constructio determinatur individualiter per ea, quae §. 169 individualiter determinata supposita sunt: ergo etiam omnes lineae $MT, MT^I, MT^{IV}, \dots$ uti et $MT^I, MT^{III}, MT^V, \dots$ sicuti et omnes arcus, per ejusmodi puncta intercepti, per easdem res simul individualiter determinantur; quin et omnes harum linearum rectarum atque arcuum quoad magnitudinem rationes.

§. 175. Expressio analytica fundamentalis $l = \frac{1}{w}$ respectu unitatis longitudinalis et unitatis angularis, quae ambae tacite subintelliguntur (§. 32, 66), plane generalis et universalis est. Omnes igitur proprietates hujus curvae, quae inde ab hac expressione fluunt de omnibus ejusmodi curvis valent, utut eae ob unitatum $\bar{1}$ et $\dot{1}$ diversitatem diversae sunt. Cum $l = \frac{1}{w}$ proprie scribi debeat $l \cdot \bar{1} = \frac{1}{w} \cdot \bar{1}$, mutata unitate longitudinali in $\bar{1}' = m \cdot \bar{1}$, unitateque angulari $\dot{1}$ in $\dot{1}' = n \cdot \dot{1}$, habebitur $l \cdot m \cdot \bar{1} = \frac{m \cdot \bar{1} \cdot n \cdot \dot{1}}{w \cdot n \cdot \dot{1}}$ hoc est $lm \cdot \bar{1} = \frac{m \cdot \bar{1}}{w}$ vel $l = \frac{1}{w}$. Unde sequitur, omnes has curvas inter se similes, hoc est, formâ easdem esse, quamvis per diversitatem unitatum $\bar{1}$ et $\dot{1}$ magnitudine diversae esse possint.

Jam vero exinde sequitur: omnes curvas, per aequationem generalem $l = \frac{1}{w}$ expressas, easdem similium arcuum, chordarum, omniumque linearum rectarum ad similes arcus similiter positaram rationes praebere, uti id in circulo obtinet. Quare ex gr. om-

nes lineae, per curvae hujus intersectiones datae MT , MT^I , MT^{II} , MT^{III} , etc. in quolibet linea, per aequationem $l = \frac{1}{w}$ data, easdem constanter rationes exhibent.

§. 176. Cum linea, per aequationem $l = \frac{1}{w}$ data, antequam a me inventa fuerit, quod sciam Geometris ignota remansisset *), meo jure eidem nomen curvae reciprocae seu antilogae indidi; quia ejus arcus et anguli sunt in ratione reciproca seu $\alpha\upsilon\tau\iota\lambda\omicron\gamma\iota\kappa\omega\varsigma$ constituti. Lineam vero LTS , quae per centrum antilogae perpendicularis est in lineam RR' directricem, lineam diametricalem s. medianam voco; quia antilogae symmetriam indicat. Omnes deinde lineas rectas, quae directioni fundamentali RR' parallelae sunt, parallelas asymptoticas nomino; ex quibus ea, quae per centrum transit, parallela asymptotica centralis, seu directrix centralis vocabitur.

§. 177. Jam hactenus assumimus in linea antiloga ($l = \frac{1}{w}$) unitatem longitudinalem et unitatem angularem ad unum eundemque arcum pertinere (no. 168 ss.). Sed hoc etiam secus esse potest, uti in circulo (n. 129 ss.).

Nam ob quantitatem longitudinis et anguli continuam, primo fieri potest, ut angulus, qui competit unitati angulari arbitrario assumtae, pro longitudine arcus sui non supponatur habere unitatem longitudinalem $\bar{1}$, sed ejus aliquod multipulum, quod dicatur $\frac{q}{p}$, ubi q et p comprehendunt omnes valores possibiles. Invenietur ergo unitas longitudinaris ex longitudine $\frac{q}{p}$ dicti arcus, cujus angulus est $= \bar{1}$, si nimirum hic arcus quoad longitudinem dividatur in q partes et sumatur ejusmodi partis multipulum p . Qui valor unitatis $\bar{1}$, si inmittatur in proportionem antilogae fundamentalem (α), haec transformabitur in

$$l \cdot \bar{1} \dots \frac{p}{q} \bar{1} = \bar{1} \dots w \cdot \bar{1}$$

$$\text{Unde sequitur } \frac{q \cdot \bar{1}}{p \cdot \bar{1}} = \frac{\bar{1}}{w \cdot \bar{1}}, \text{ sive } l \cdot \bar{1} = \frac{p \cdot \bar{1}}{q \cdot w \cdot \bar{1}}, \text{ sive unitatibus } \bar{1} \text{ et } \bar{1}$$

subintellectis, factoribusque p et q ad unitatem absolute generalem relatis: $l = \frac{p}{q \cdot w}$.

Item, si arcus, qui competit unitati longitudinari arbitrario assumtae $\bar{1}$, pro angulo suo non supponitur habere unitatem angularem ipsam, sed ejus multiplam $\frac{p}{q}$: invenietur unitas angularis $\bar{1}$ ex magnitudine data angulari $\frac{p}{q}$, si nempe ejus p -ta pars sumatur q

*) Attamen quia Geometricos libros, singularesque de lineis curvis tractatus plures quidem, neque tamen omnes, legi, facile fieri potuit, de hac etiam linea jam ante me alium quem vel obiter vel ex instituto egisse, quare non nisi hoc mihi sumere licet, ut hujus lineae constructionem a nemine didicerim, sed ipse, vi methodi generalis originariae a me inventae, invenerim.

vicibus, unde proportio fundamentalis (α) mutatur in hanc $l \cdot \bar{1} \dots \bar{1} = i \dots \frac{q}{p} \cdot w \cdot i$,

unde iterum datur $\frac{l \cdot \bar{1}}{\bar{1}} = \frac{p \cdot i}{q \cdot w \cdot i}$, sive $l = \frac{p}{q \cdot w} \dots \dots (s)$ (s)

Pariter, si arcus definitus antilogae datae censeatur non habere longitudinem unitati longitudinali aequalem, sed ejus multipulum p ; similiterque ejusdem arcus dicti angulus assumatur esse multipulum unitatis angularis $\frac{1}{q}$, habebitur proportio $l \cdot \bar{1} \dots p \cdot \bar{1} = i \dots$

$q \cdot w \cdot i \dots (\gamma)$ quia nimirum in quavis antiloga longitudinum omnium cum angulis iisdem arcubus convenientibus generaliter obtinet ratio reciproca. Unde fluit (y)]

$$\frac{l \cdot \bar{1}}{p \cdot \bar{1}} = \frac{i}{q \cdot w \cdot i} \text{ sive } \frac{l \cdot \bar{1}}{\bar{1}} = \frac{p \cdot i}{q \cdot w \cdot i},$$

sive, unitatibus subintellectis item $l = \frac{p}{q \cdot w} \dots \dots (s)$

§. 178. Ex proportione (γ) deducuntur sequentes proportionones, quarum frequens est in sequentibus usus:

$$\begin{aligned} l \dots \frac{1}{q} &= p \dots w \text{ sive } l \dots \frac{1}{q} = \frac{p}{w} \dots 1 \\ ql \dots 1 &= 1 \dots \frac{w}{p} \text{ sive } ql \dots 1 = \frac{1}{w} \dots \frac{1}{p} \\ l \dots \frac{q}{p} &= 1 \dots w \text{ sive } l \dots \frac{p}{q} = \frac{1}{w} \dots 1 \\ l \dots 1 &= \frac{p}{q} \dots w \text{ sive } l \dots 1 = \frac{p}{q \cdot w} \dots 1 \\ \frac{l}{p} \dots 1 &= 1 \dots q \cdot w \text{ sive } \frac{l}{p} \dots 1 = \frac{1}{w} \dots q \\ \frac{q}{p} l \dots 1 &= 1 \dots w \text{ sive } \frac{q}{p} l \dots 1 = \frac{1}{w} \dots 1 \\ l \dots 1 &= 1 \dots \frac{q}{p} \cdot w \text{ sive } l \dots 1 = \frac{1}{w} \dots \frac{q}{p} \end{aligned}$$

§. 179. Expressio (s) est generalissima, et factis $p = 1$ et $q = 1$, simplicissimam quoque comprehendit antilogae expressionem, quam adhuc pertractavimus. Haec ergo expressio (s) dat pro l et w ad eundem arcum pertinentes praecipuos valores hos, quos sequens exhibet tabula:

l	w	$\rho^*)$	l	w	ρ
$\frac{p}{q w}$	$\frac{p}{q l}$	$-\frac{\varepsilon p}{q w^2} = -\frac{\varepsilon q l^2}{p}$	$\frac{p}{q w}$	$\frac{p}{q l}$	$-\frac{\varepsilon p}{q w^2} = -\frac{\varepsilon q l^2}{p}$
∞	0	$-\frac{\varepsilon q \infty^2}{p}$	$\frac{p}{q}$	1	$-\frac{\varepsilon p}{q}$
1	$\frac{p}{q}$	$-\frac{\varepsilon q}{p}$	$\frac{p}{q^2}$	q	$-\frac{\varepsilon p}{q^3}$
$\frac{q}{p}$	$\frac{p^2}{q^2}$	$-\frac{\varepsilon q^3}{p^3}$	0	∞	0
$\frac{q^{m-1}}{p^{m-1}}$	$\frac{p^m}{q^m}$	$-\frac{\varepsilon q^{2m-1}}{p^{2m-1}}$	$\frac{1}{q}$	p	$-\frac{\varepsilon}{q p}$
$\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$	$\frac{p^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}}$	$-\frac{\varepsilon q^2}{p^2}$	$\frac{p^2}{q^2}$	$\frac{q}{p}$	$-\frac{\varepsilon p^3}{q^5}$
$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p^3}{q^2}$	$-\frac{\varepsilon q^5}{p^5}$	$\frac{p^{m+1}}{q^{m+1}}$	$\frac{q^m}{p^m}$	$-\frac{\varepsilon p^{2m+1}}{q^{2m+1}}$
$\frac{p^{n+1}}{q^{m+1}}$	$\frac{q^m}{p^n}$	$-\frac{\varepsilon p^{2n+1}}{q^{2m+1}}$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\frac{p}{\sqrt{\varepsilon \cdot q}}$	$-\frac{\varepsilon^2 q}{p}$
p	$\frac{1}{q}$	$-\varepsilon p q$	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon \cdot p}}{q}$	$-\frac{q}{p}$
q	$\frac{p}{q^2}$	$-\frac{\varepsilon q^3}{p}$	$\frac{p}{q \sqrt{\varepsilon}}$	$\sqrt{\varepsilon}$	$-\frac{p}{q}$
$\frac{q^m}{p^n}$	$\frac{p^{n+1}}{p^{m+1}}$	$-\frac{\varepsilon q^{2m+1}}{p^{2n+1}}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon \cdot p}}{q}$	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$	$-\frac{\varepsilon^2 p}{q}$
$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$	$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$	$-\varepsilon \cdot 1$			

*) Hac columnâ valores radii curvaturae (§. 183) anticipando apposuimus; ne haec tabula bis scribi debeat.

§. 180. In círculo longitudinem peripheriae dimidia π expressimus per lineam rectam constantem, nempe radium. Ejusmodi vero lineae characteristicae constantes, quarum ratio in omnibus magnitudine diversis antilogis eadem est, etiam in antiloga adsunt innumerae (§. 174, §. 175); praesertim lineae MT et MT' . Quarum ratio ad arcum antilogae $= 180^\circ$ aut $m \cdot 180^\circ$ inventa methodis similibus, ac quibus in círculo factum est, deinde inserviet ad antilogae arcus mensurandos.

§. 181. Antiloga círculo naturâ proxima est, cum quo id habet commune, ut arcus et anguli sint omnes definiti per unam eandemque rationem; sed tamen in hoc ipso círculo etiam est directe opposita, quia arcus et anguli sunt quidem semper in eadem ratione, sed in ratione opposita seu reciproca, ita ut definitio antilogae sit definitioni circuli directe opposita, quod etiam in expressionibus harum definitionum analyticis apparet, nempe in $l = \frac{P}{q w}$ et $l = \frac{P}{q} w$.

Circulus ergo est curva unica, cujus curvatura per omnem lineam eadem est; sed antiloga contra est curva unica, cujus curvatura continuo mutetur quidem, sed arcus tamen ac anguli sint semper in eadem, at in reciproca, ratione.

Habet etiam antiloga cum círculo hoc commune, ut ejus functio originaria $l = \frac{P}{q w}$ eandem specie curvam det, quamvis, reliquis manentibus, w et l permutentur, ut habeatur $w = \frac{P}{q l}$. Sed etiam in hac communi affectione antiloga ἀντιλογικῶς se habet ad circulum. Nam $l = \frac{P}{q w}$ dat individualiter eandem curvam ac $w = \frac{P}{q l}$; sed contra $l = \frac{P}{q} w$ dat quidem circulum pariter ac $w = \frac{P}{q} l$, sed cujus radius multipulum reciproci sit radii circuli ejus, qui datur per $w = \frac{P}{q} l$.. (§. 137).

§. 182. Definiatur nunc relatio inter differentias longitudinum arcuum et differentias angulorum ad eosdem arcus pertinentium in antiloga ex aequatione ejus generali $l = \frac{P}{q w}$. Erit ergo $l + \Delta l = \frac{P}{q (w + \Delta w)}$; proinde $\Delta l = - \frac{P \Delta w}{q w (w + \Delta w)}$ (m). Quae expressio pro $w = 1$, quo fit $l = \frac{P}{q}$, abit in $\Delta l = - \frac{P \Delta w}{q (1 + \Delta w)}$ (n) (m) (n)

Pro $w = 0$, ex (m) habetur $\Delta l = -\infty$; et pro $w = \infty$ erit $\Delta l = 0$.

Formula (m) simul monstrat has differentias sibi non esse proportionales, neque in eadem, neque in reciproca ratione. Nam si pro $w = 1$ fiat $\Delta w = 1$ erit $\Delta l = -\frac{P}{2q}$; si $\Delta w = 2$, habetur $\Delta l = -\frac{2P}{3q}$; si $\Delta w = 3$, provenit $\Delta l = -\frac{3P}{4q}$; et generaliter, si $\Delta w = z$, erit $\Delta l = -\frac{zP}{(z+1)q}$; quae series non congruit cum serie

differentiis w proportionali $\frac{-p}{2q}, \frac{-p}{q}, \frac{-3p}{2q}, \dots \frac{-zp}{2q}$ directa, neque cum indirecta $\frac{-2q}{p}, \frac{-q}{p}, \frac{-2q}{3p}, \dots \frac{-2q}{zp}$.

Quodsi vero statuatur $p = q$, ergo $l = \frac{1}{w}$, fiet $\Delta l = \frac{-\Delta w}{w(w + \Delta w)}$, et pro $w = 1$ fit $\Delta l = \frac{-\Delta w}{1 + \Delta w}$.

§. 183. Determinetur nunc pariter antilogae curvatura atque curvaturae radius. (coll. §. 179).

Ex definitione antilogae constitutiva jam (no. 169) conclusimus, curvitatem ejus esse mutabilem, sive, quod idem est, radium curvaturae esse mutabilem (no. 140); et quidem ita, ut curvitas versus centrum M crescat, versus directionem fundamentalem RR' decrescat, et utrumque sine fine; sive ita, ut curvaturae radius versus centrum sine fine decrescat, versus directionem fundamentalem RR' vero sine fine crescat.

Jam vero (nis. 151 et ss.) demonstratum est, pro quovis lineae curvae cujusvis planae puncto esse curvaturae radium $= \frac{dl}{dw} \cdot \frac{\text{angul. } \rho}{10}$ sive $\frac{dl}{dw} \cdot \frac{57,2957^\circ \dots}{10}$, ubi 1° indicat unitatem angularem pro arbitrio assumptam, sed per gradus anguli circularis expressam, pro quo brevius scripsimus (no. 151) $\frac{\epsilon dl}{dw}$, facto $\epsilon = \frac{57,2957^\circ \dots}{10}$. Sed

pro aequatione $l = \frac{p}{qw}$ est $\frac{dl}{dw}$, secundum calculi differentialis regulas, $= \frac{-p}{qw^2}$, ergo

- (p) antilogae radius curvaturae $\rho = \frac{-\epsilon p}{qw^2} \dots$ (p); qui valor etiam invenitur, si in expressione (m) (ni. praecedentis) differentiae longitudinis et anguli, nempe Δl et Δw ponantur $= 0$ et loco Δl et Δw ponatur dl et dw , et multiplicetur per ϵ . Et cum w sit $= \frac{p}{ql}$, erit quoque $\rho = \frac{-\epsilon ql^2}{p} \dots$ (q). Unde pro variis valoribus l et w eliciuntur eorundem radii curvaturae valores varii, e quibus principales sunt ii, quos no. 179 antecipando adscripsimus. Generatim vero antilogae curvaturae radius crescit in duplicata ratione directa longitudinis, sed in duplicata ratione reciproca anguli. Atque ex valoribus radii curvaturae (p) et (q) infertur, antilogam esse in centro infinite curvam, et prout inde procedat fieri continuo minus curvam, valore w^2 inde a centro semper decrescente, et deinde continuo appropinquare ad curvitis valorem $= 0$, quia si w ponatur $= 0$, radius curvaturae fit $= \infty^2$.

Si in construenda antiloga assumatur unitas angularis $= 57,2957^\circ \dots$, tunc valor ϵ fit $= 1$ (§. 151), unde radiorum curvaturae computus commodior fit. Quae suppositio si, uti fieri solet, tacito subintelligatur, dici potest: in antiloga radium curvaturae esse $= \frac{p}{qw^2}$.

§. 184. In tractatione generali de curvis (hic no. 154) demonstratur: per expressionem radii curvaturae cujusvis curvae originariam etiam dari expressionem originariam lineae ejus, quae formatur per continuum fluxum punctorum eorum, in quae radii curvaturae extra curvam terminantur, hoc est lineae quae vocatur prioris lineae evoluta. Unde sequitur, per antilogae expressionem fundamentalem originariam $l = \frac{P}{q w}$, dari quoque expressionem $\rho = \frac{-P^\epsilon}{q w^2}$ radii circuli curvaturae mutabilis; quae, si loco ρ scribatur l_{-1} , signum evolutae primae, erit $l_{-1} = \frac{-^\epsilon P}{q \cdot w^2} \dots (r)$; quae expressio, si (r) tacito subintelligatur, ut in doctrina de curvis fieri solet, unitatem angularem esse $= 57,2957^\circ \dots$, abit in hanc $l_{-1} = -\frac{P}{q \cdot w^2} \dots (s)$; imo, si statuatur $p = q$ in hanc (s) $l_{-1} = -\frac{1}{w^2} \dots (t)$. Ceterum clarum est; hanc antilogae evolutam primam esse ex- (t) pressam secundum eandem unitatem angularem i , secundum quam etiam expressa est antiloga ipsa: nam per formulam $l_{-1} = \frac{-^\epsilon P}{q w^2}$ indicantur arcuum evolutae longitudinares (67), quae pertinent ad eosdem angulos w relativos ad evolutae directionem fundamentalem, sed ad angulos $w - 90^\circ$, si referantur anguli evolutae ad directionem fundamentalem antilogae ipsius (§. 153), qui ad idem punctum etiam in antiloga ut anguli relativi seu finales (§o. 72) occurrunt.

§. 185. Hujus lineae evolutae primae proprietates principales jam eruuntur e valoribus radii ρ , quos jam in schemata ni. 179 descripsimus. Cum pro $w = +\infty$ sit $l = 0$, simulque etiam $\rho = l_{-1} = -0$: patet, antilogam ejusque evolutam primam habere centrum commune; et cum pro $\pm w = 0$ sit $l_{-1} = -^\epsilon \infty^2$: sequitur, evolutae brachium unum inde a centro communi M per longitudines l_{-1} negativas, angulosque relativos negativos infinities circumvolvendo continuo decrescentes, brachiumque evolutae alterum infinities in linea MKT (fig. 74) secando tandem pervenire definita Fig. 74. longitudine arcus a centro porrecti in punctum K , ubi alterum brachium ultima vice secat, atque deinde sine fine adpropinquare ad directionem $Q Q'$ asymptotam, sine fine simul supra lineam MKT surgendo, quia etiam brachium $MTN \dots$ antilogae supra eandem lineam MT sine fine surgit (§. 170 ss.); unde simul perspicitur, lineam infinitam $Q Q'$, lineae MT parallelam, ab hac ipsa linea in infinitum recedere, quia nimirum pro l infinito fit $w = 0$, ergo $l_{-1} = -\frac{^\epsilon P}{q \cdot 0^2} = -\frac{^\epsilon P \infty^2}{q}$, ergo l_{-1} infinita est. — Similiter apparet, alterum evolutae brachium longitudinibus arcuum suorum, hoc est valoribus l_{-1} positivis, angulis vero w quoque (quia pro $l = -0$ habetur $w = -\infty$) positivis, continuo positive decrescentibus, infinities circumgyrando brachium alterum evolutae infinities in linea MKT secando tandem definita longitudine arcus, a centro coepti adtingere punctum K , ibique alterum brachium ultimo loco secare, deinde vero sine fine accedere ad directionem $Q Q'$ simul sine fine descendendo, quia etiam brachium MTN' antilogae infra eandem lineam sine fine descendit (§. 170 ss.).

Restat notasse, quidnam signum oppositae directionis in expressione evolutae denotet. Generaliter hoc jam ostensum est antea (no. 154); sed hujus lineae exemplo nunc

illustratur. Significat ergo hoc negativae directionis signum, evolutam, dum antilogam per radiorum evolutorum puncta finalia describit, retrorsum evolvi (dafs sie abgewickelt oder losgewickelt wird); et quidem utrumque ejus brachium, quia signum negativum in expressione $\rho = -\frac{\epsilon p}{q w^2}$ sive $= -\frac{\epsilon q l^2}{p}$ de signo $\pm l$ et $\pm w$ non dependet, cum $(\pm l)^2$ sit $= + l^2$ uti et $(\pm w)^2 = + w^2$.

§. 186. Ex evoluta antilogae prima $= -\frac{\epsilon p}{q w^2}$ derivatur antilogae evoluta secunda.

Nam dl_{-1} est $= +\frac{2\epsilon p dw}{q w^3}$; indeque $\frac{dl_{-1}}{dw} = \frac{\epsilon d^2 l}{dw^2} = \frac{l_{-2}}{\epsilon}$ (§. 155) $= +\frac{2\epsilon p}{q w^3}$,

adeoque $l_{-2} = +\frac{2\epsilon^2 p}{q w^3}$.

Qui evolutae secundae valor est pro $+w$ et $+l$ antilogae positivus, sed pro $-w$ et $-l$ antilogae negativus. Et cum pro $\pm w = \pm \infty$ fiat $l_{-2} = \pm 0^3$, at pro $\pm w = \pm 0$ sit $l_{-2} = \pm \infty^3$: sequitur, evolutam secundam habere cum prima et cum antiloga ipsa centrum commune, atque se ipsam, deinde vero etiam antilogae evolutam primam imo et antilogam ipsam infinities secare, ita ut se ipsam ultima vice in puncto T , lineae KMT' e regione puncti T trans centrum M decusset, atque deinde cum brachio suo altero MUT , antilogae brachio MTN respondente, sine fine descendendo infra lineam KMT' , sine fine quoque adpropinquare ad directionem fundamentalem suam PP' antilogae directioni fundamentali RR' contrarie parallelam; cum altero vero brachio MVT , quod refertur ad antilogae brachium MTN' , postquam se ipsam ultima vice secuerit, sine fine supra lineam KMT , surgere, atque sine fine accedere ad directionem PP , quae est fundamentali PP' contrarie opposita, ideoque directioni antilogae fundamentali RR' directe parallela; ita quidem ut lineae RR' et PP' sine fine a se invicem discedant, cum sint lineae ad brachia respectiva non ipsae asymptoticae, sed tantum directiones asymptoticas indicent.

Item tertia antilogae evoluta l_{-3} eadem via invenietur esse $= -\frac{1.2.3\epsilon^3 p}{q w^4}$; unde hujus tertiae evolutae natura evincitur similis esse cum evolutae primae natura, eo quod post ultimam sui-sectionem brachia ejus duo sibi partem concavam advertant.

Et generaliter pro antilogae evoluta m -ta invenitur $l_{-m} = \frac{\epsilon dl_{-(m-1)}}{dw}$ quod est, signi oppositivi ratione nondum habitâ, si mera magnitudo spectetur, $= \frac{1.2.3\dots m\epsilon^m p}{q w^{m+1}}$; et erunt hujus evolutae m -tae brachia constanter negativa si fuerit m numerus impar; sin autem m fuerit numerus par, alterum evolutae m -tae brachium erit positivum pro w positivo, alterum vero negativum pro w negativo.

Factor quidem ϵ arbitrarius est, quia de arbitrarie assumta magnitudine unitatis longitudinalis et angularis $\bar{1}$ et $\dot{1}$ dependet (§. 100); sed omnis valoris ϵ mutatio per unitatis angularis mutationem in valoribus terminorum seriei evolutarum antilogae nihil mutat; nam ϵ est (§. 100) $= \frac{57,2957^\circ}{1^\circ}$; crescente igitur unitate angulari factor ϵ decrescit; at

decescente crescit; at crescente unitate angulari et factor w crescit, decrescente vero decrescit et utrumque eadem ratione ac simul ε aut decrescit aut crescit; ergo factores $\frac{\varepsilon}{w}, \frac{\varepsilon^2}{w^2}, \frac{\varepsilon^3}{w^3} \dots \frac{\varepsilon^m}{w^m}$, mutata unitate angulari non mutantur. Jam vero expressio antilogae $l = \frac{p}{q w}$ multiplicata per $-\frac{\varepsilon}{w}$ dat $l_{-1} = -\frac{\varepsilon p}{q w^2}$; porro $l_{-1} \cdot -\frac{2\varepsilon}{w}$ dat $l_{-2} = +\frac{2\varepsilon^2 p}{q w^3}$, et sic porro sine fine. (Idem jam generaliter demonstratum est §o. 153).

§. 187. Definiamus nunc etiam antilogae lineam evolventem primam, quae signatur (n. 156) per l_1 , unde etiam evolventes altiores dependent. Angulus antilogae w est omnibus ejus evolventibus communis, si is referatur ad directionem fundamentalem evolventis, sin autem ad directionem fundamentalem antilogae, erit is $= w + 90^\circ$ (§. 155). Jam evolutio fiat inde a puncto antilogae centrali M , id quod fieri potest, quia antilogae longitudo inde a centro usque ad quodlibet utriusque brachii punctum definitum, pro quovis valore w , finita est (n. 170 et n. 179).

Jam per ea, quae supra (n. 156) generaliter ostensa sunt, est $l = \frac{\varepsilon dl_1}{dw} = \frac{p}{q w}$, ergo $\varepsilon dl_1 = \frac{p}{q} \cdot \frac{dw}{w}$, indeque $\varepsilon \int dl_1 = \frac{p}{q} \int \frac{dw}{w} + \text{constans}$, hoc est: $l_1 = \frac{p}{\varepsilon q} \log. w + \text{const.}$, ubi e designat basim logarithmorum naturalium. Quod constantem adtinet, ea uti omnis integrali addenda constans, in se spectata potest esse quaelibet, modo aequationi integrali satisfaciat; ergo etiam haec constans in integrali evolventis l_1 addenda, quam vocemus c' in antilogae centro poterit poni $= 0$; quo facto l_1 fit $= \frac{p}{\varepsilon q} \log. w$; unde pro $w = \frac{\infty}{2}$ habetur $l_1 = \frac{p}{\varepsilon q} \cdot \log. \frac{\infty}{2}$; nam angulus w in centro antilogae non est nisi $\frac{\infty}{2}$ (no. 37); et cum e sit $= 2,817 \dots > 1$, erit $\log. \frac{\infty}{2} = \infty - \log. 2 = +\infty$. Et pro $w = 1$ erit $l_1 = 0$, ubi $l = \frac{p}{q}$, unde porro fluit, posito valore $\varepsilon = 1$, $\frac{q l_1}{p} = \log. w$, ergo $e^{\frac{l_1 q}{p}} = w$. Pro $w = \frac{p}{q}$ erit $l_1 = \frac{p}{q} (\log. p - \log. q)$, atque $l = 1$. Itaque inveniuntur valores pro omnibus w .

Quaecunque autem assumatur constans, si sumatur $w = 1$, erit semper $l_1 = \frac{p}{q} \log. 1 + c' = c'$. Quare constantis initium semper erit in eo evolventis puncto quod correspondet angulo antilogae w , ubi $l = \frac{p}{q}$; invenieturque adeo punctum initii evolutionis, si inde ab eo puncto antilogae ubi $w = 1$, atque $l = \frac{p}{q}$, sumatur in antiloga valor constantis uti ea in aequatione integrali evolventis assumpta est, atque tum antiloga inde a puncto finali hoc evolvatur.

§. 188. Ex his perspicitur, lineam evolventem antilogae esse versicuryam illam e lineis curvis simplicissimis, quam (no. 66) spiralem logarithmicam (seu logisticam) angularem vocavimus.

Jam construendae evolventi antilogae s. logisticae angulari ut evolventi antilogae inserviunt valores principales sequentes, jam inventi. Pro $l_1 = 0$ erit $w = 1$; ergo initium longitudinis evolventis est, ubi in antiloga w quoque $= 1$ atque $l = \frac{P}{q}$. Pro $w = e$, erit ${}^e\log. w = {}^e\log. e = 1$, ergo $l_1 = \frac{P}{e q}$, sed l tunc erit $\frac{P}{q e} = \frac{P}{q \cdot 2,817 \dots}$. Si porro $w = 0$, erit ${}^e\log. w = -\infty$, ergo $l_1 = -\infty$, quia $e > 1$, dum l est $= +\infty$. Si tandem $w = \frac{\infty}{2}$, erit quoque ${}^e\log. w = {}^e\log. \frac{\infty}{2} = {}^e\log. \infty - {}^e\log. 2 = \infty - {}^e\log. 2 = \infty$, quia $e > 1$; dum $l = +0$.

Si l antilogae ponatur negativa, erit quoque angulus w negativus (§. 170 et 179). Unde pro evolvente brachii antilogae alterius habetur $\frac{{}^e d l_1}{-dw} = -l = -\frac{P}{q w}$; ergo $d l_1 = \frac{P}{e q w} dw$.

Unde patet, antilogae brachium alterum idque negativum habere evolventis brachium plane idem ac id quod antilogae brachium positivum habet, nisi quod ab eo puncto quod respondet puncto antilogae ubi $-l$ est $= -\frac{P}{q}$ utrinque extendatur. Quare formula $l_1 = \frac{P}{e q} {}^e\log. w + \text{const.}$ duo evolventis brachia simul exprimit. Neque vero etiam l_1 valorem realem pro $-w$ habere potest, quia negativarum continuarum quantitatum logarithmi continui non dantur.

Fig. 75.

Fig. 75.

§. 189. Jam vero cum in linea evolvente antilogae, quae est logistica angularis, pro $w = 0$ sit l_1 utrinque $= -\infty$, sequitur per $w = 0$ assignari huic lineae logisticae directionem fundamentalem asymptotam, quae quidem ob evolventis cujusvis ad fundamentalem lineam relationem generalem (§. 155) directioni fundamentali antilogae, RR' angulo recto opponitur; exprimiturque figura 75 per parallelam directricem $r''r'''$. Utrum vero haec linea evolvens logistica habeat lineam directricem asymptotam, nec ne, id ex iis, quae hucusque demonstrata sunt, non patet. Sed utut hoc sit, tamen per dicta probatum est, lineam evolutam Mbc (fig. 75) sine fine versus directionem asymptotam $r''r'''$, quam attingere nequit, excurrere, ideoque etiam antilogam $Mabc \dots$, per cujus evolutionem logistica haec datur, excurrere sine fine versus directionem suam asymptotam RR' , hoc est: antilogam ipsam non habere lineam asymptotam, sed tantum directionem asymptotam; id quod antea (no. 172) quaerebatur.

§. 190. Eadem via nunc etiam antilogae evolvens secunda, quae vocabitur l_2 invenitur. Habemus enim $\frac{{}^e d l_2}{dw} = l_1 = \frac{P}{e q} {}^e\log. w$. nempe constante c' facta $= 0$; indeque ${}^e d l_2 = \frac{P}{e q} {}^e\log. w \cdot dw$, adeoque integrando $l_2 = \frac{P w}{e^2 q} ({}^e\log. w - 1)$

+ c'' , atque pro constante $c'' = 0$ erit $l_2 = \frac{Pw}{\epsilon^2 q} (\log. w - 1)$. Et est quidem initium evolutionis secundae in eo puncto evolventis primae, in quo $l_1 = 0$ pro $w = 1$ atque $l = \frac{P}{q}$. Immisso ergo valore $w = 1$ habetur in puncto initii evolutionis secundae pro l_2 valor $-\frac{P}{\epsilon^2 q}$. Facto $w = e$, l_2 fit $= 0$. Posito $w = \infty$, habetur $l_2 = p \cdot \frac{\infty^2}{\epsilon^2 q} = \infty^2$. Sed pro $w = 0$ invenitur $l_2 = -\frac{P}{\epsilon^2 q} \cdot 0 \cdot \infty$; sed cum valor definitus pro $0 \cdot \infty$ ex $w \log. w$ oriundus secundum methodos usitatas quaesitus, sit $= 0$; (videatur Eytelwein Grundlehren der höhern Analysis, B. I, S. 292): l_2 pro $w = 0$ est $= -\frac{P}{\epsilon^2 q} \cdot 0 = -0$.

Exinde etiam colligitur lineam evolventem antilogae primam habere lineam directionis fundamentalis asymptotam; quia nimirum arcus evolutae secundae $J''d$ (fig. 75) est, inde a puncto d ductus $= \frac{P}{\epsilon^2 q}$ finitus, ergo etiam chorda ejus $J''fd$, eoque magis linea in directionem extremam evolventis primae $r''r'''$ perpendicularis $J''gd''$ quoque finita.

§. 191. Restat ut notemus, nos hic eam tantum evolventis formam explicuisse, quae respondet evolventis initio cum initio evolutae hoc est antilogae in eodem puncto accipiendo. Sin autem evolventis initium cogitetur generaliter esse in quolibet spatii puncto, tunc loco l substituendus foret valor $l \pm 1$, sive $l' = \frac{P}{qw} + c_0$. Unde l'_1 quaerenda foret ex $\epsilon dl'_1 = \left(\frac{P}{qw} + c_0 \right) dw$, ergo esset $l'_1 = \frac{P}{\epsilon q} \log. w + \frac{c_0 w}{\epsilon} + c'$. Quae evolvens memorabilibus virtutibus commendatur, quas enumerasse non hujus loci est.

§. 192. Secundum aequationem fundamentalem antilogae ejusdem constructio exit quoad longitudines arcuum e centro, quoad angulos finales seu directiones finales vero eorundem arcuum a directione fundamentali RR' . Sed initium longitudinum potest in quavis data antiloga etiam in quovis alio ejus puncto assumi, fundamentali directione manente eadem vel etiam mutata; quin et initio centrali retento directio fundamentalis mutari potest (quia haec plane arbitraria est). Novum longitudinum initium, J' inde ab initio originario, hoc est a centro, distat definita longitudine, quae sit ± 1 , prout J' est aut in positivo aut in negativo antilogae brachio. Si igitur arcuum antilogae e novo initiali puncto J' constructae longitudines designentur per l' ; pro $+1$ erit $l' + 1 = l$, et pro -1 erit $l = l' - 1$; sive pro ± 1 habetur $l = l' \pm 1$. Si igitur in aequationem fundamentalem antilogae $l = \frac{P}{qw}$ hic valor $l = l' \pm 1$ immittatur, orietur aequatio antilogae pro novo initiali puncto J' et pro ± 1 ; quae est $l' \pm 1 = \frac{P}{qw}$, unde $l' = \frac{P}{qw} \mp 1 = \frac{P \mp qw}{qw}$.

§. 193. Similiter si directio fundamentalis RR' immutetur, et adsumatur loco ejus nova aliqua directio R,R' , ea cum priore directione RR' definitum conficit angulum,

Fig. 73.

(qui sit w) et quidem aut positivum, aut negativum. Qui angulus w , si positivus fuerit, exhibebitur infinitis vicibus per infinite multos arcus positivos antilogae uti (Figura 73) in puncto b ; sin autem negativus idem accidet in antilogae brachio negativo uti in puncto b' .

Jam vero pro $+w$ habebitur $w' + w = w$, si per w' designentur anguli arcuum finales antilogae ad novam directionem fundamentalem relati; et pro $-w$ erit $w' - w = w$; ergo pro $\pm w$ erit $w' \pm w = w$. Quo valore w in aequationem fundamentalem illato habetur $w' \pm w = \frac{P}{q l}$, sive $l = \frac{P}{q (w' \pm w)}$.

§. 194. Si denique longitudinis initium atque fundamentalis directio simul immutentur, erit simul in fundamentalem aequationem ingerendum $l = l' \pm l$ et $w = w' \pm w$, unde fit

$$(a) \quad l' \pm l = \frac{P}{q (w' \pm w)} \quad \text{ergo } l' = \frac{P \mp q (w' \pm w) l}{q (w' \pm w)} \dots (a)$$

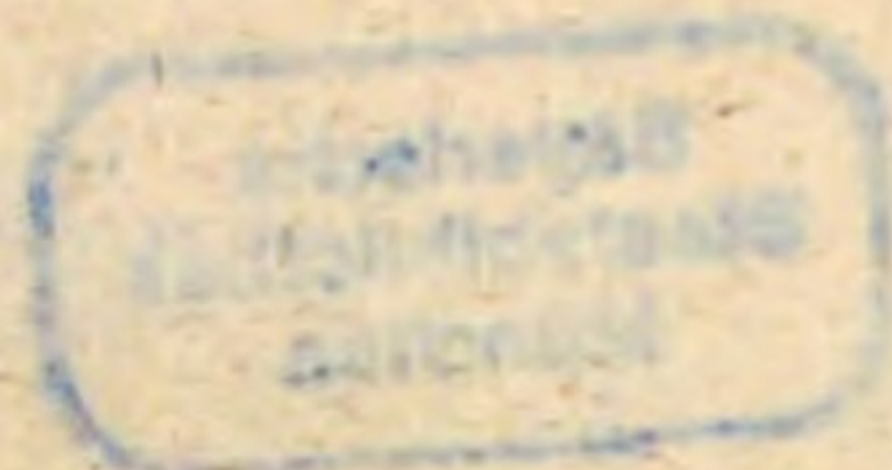
$$(b) \quad \text{et } w' = \frac{P \mp q (l' \pm l) w}{q (l' \pm l)} \dots (b)$$

$$(c) \quad \text{quae aequationes respondent aequationi generali } blw \pm dl \pm ew \pm f = 0. (c)$$

Hujus aequationis immutatae hic eum tantum discutiemus casum, in quo $l = \frac{P}{q}$ manente directione fundamentali, et eum in quo $w = 1$ manente longitudinum initio.

Primo ergo loco sit $l = \frac{P}{q}$, manente w sive manente directione fundamentali.

Novum ergo punctum initiale J' erit in eo antilogae puncto, ubi $l = \frac{P}{q}$ et $w = 1$. Est vero $l' + \frac{P}{q} = \frac{P}{q w}$, proinde $l' = \frac{P}{q} \left(\frac{1}{w} - 1 \right) = \frac{P}{q} \left(\frac{1-w}{w} \right)$. Unde prodeunt sequentes valores pro l' et w ad eadem puncta curvae pertinentes.



l	w	l	w
$+ 0$	$+ 1$	$- 0$	$+ 1$
$+ \frac{p}{q}$	$+ \frac{1}{2}$	$- \frac{p}{q}$	∞
$+ \frac{p}{mq}$	$+ \frac{m}{m+1}$	$- 1$	$\frac{p}{p-q}$
$\vdots$	$\vdots$	$- 2$	$\frac{p}{p-2q}$
$+ \frac{p}{2q}$	$+ \frac{2}{3}$	$- 3$	$\frac{p}{p-3q}$
$+ \frac{p}{3q}$	$+ \frac{3}{4}$	$- z$	$\frac{p}{p-zq}$
$\vdots$	$\vdots$	$- \frac{p}{mq}$	$\frac{m}{m-1}$
$+ \frac{mp}{nq}$	$+ \frac{n}{m+n}$	$- \frac{p}{2q}$	2
$+ \frac{2p}{3q}$	$+ \frac{3}{5}$	$- \frac{1 \cdot p}{3 \cdot q}$	$\frac{3}{2}$
$+ \frac{3p}{4q}$	$+ \frac{4}{7}$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$- \frac{mp}{nq}$	$\frac{n}{n-m}$
$+ \frac{(m-1)p}{mq}$	$+ \frac{m}{2m-1}$	$- \frac{2p}{3q}$	3
$+ \frac{mp}{q}$	$+ \frac{1}{m+1}$	$- \frac{3p}{4q}$	4
$+ \frac{2p}{q}$	$+ \frac{1}{3}$	$\vdots$	$\vdots$
$+ \frac{3p}{q}$	$+ \frac{1}{4}$	$- \frac{mp}{q}$	$- \frac{1}{m-1}$
$+ 1$	$+ \frac{p}{p+q}$	$- \frac{2p}{q}$	$- 1$
$+ 2$	$+ \frac{p}{p+2q}$	$- \frac{3p}{q}$	$- \frac{1}{2}$
$+ z$	$+ \frac{p}{p+zq}$		

Si l' sit negativa, ac negative major quam $\frac{p}{q}$, tunc l' est trans centrum in ramo negativo, atque w fit negativus.

§. 195. Si in aequatione huc ponitur $\frac{p}{q} = 1$, sive si aequatio antilogae fundamentalis simplicissima $l = \frac{1}{w}$ dicto modo transformatur, sequens valorum principalium tabula orietur.

l'	w	l'	w
$\frac{1-w}{w}$	$+1$	± 0	1
-1	$+\infty$	$+\frac{1}{m}$	$+\frac{m}{m+1}$
$-\frac{1}{m}$	$+\frac{m}{m-1}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$+2$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{3}{4}$
$-\frac{1}{3}$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$-\frac{2}{3}$	$+3$	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{4}{7}$
$-\frac{3}{4}$	$+4$	$+\frac{m-1}{m}$	$\frac{m}{2m-1}$
$-\frac{(m-1)}{m}$	$+m$	$+2$	$+\frac{1}{3}$
-2	-1	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$
-3	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m+1}$
$-m$	$-\frac{1}{(m-1)}$	$+\infty$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\infty+1} \\ = +0 \end{array} \right.$
$-\infty$	$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{(\infty-1)} \\ = -0 \end{array} \right.$		

Si pro hac aequatione $l' = \frac{1-w}{w}$ assumantur deinceps longitudines

$$ab = 1, ac = 2, ad = 3, \text{ etc.}; \text{ atque}$$

$$ab' = -\frac{1}{2}, ac' = -\frac{2}{3}, ad' = -\frac{3}{4}, \text{ etc.}$$

habetur sequens series pro l et w et pro differentiis earum finitis, Δl et Δw :

Δl	l	w	Δw
$\frac{1}{m \cdot (m+1)}$	$\frac{m-1}{m}$	m	$+m - (m+1) = -1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-d'e' = \frac{1}{4 \cdot 5}$	$ad' = -\frac{3}{4}$	$+4$	-1
$-c'd' = \frac{1}{3 \cdot 4}$	$ac' = -\frac{2}{3}$	$+3$	-1
$-b'c' = \frac{1}{2 \cdot 3}$	$ab' = -\frac{1}{2}$	$+2$	-1
$-ab' = \frac{1}{2}$	$0 = 0$	$+1$	-1
$ab = 1$	$ab = 1$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$bc = 1$	$ac = 2$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2 \cdot 3}$
$cd = 1$	$ad = 3$	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3 \cdot 4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	m	$+\frac{1}{m+1}$	$-\frac{1}{m(m+1)}$

§. 196. Secundo loco si, manente l , mutetur w in $w' \pm w$, ideoque habeatur $l = \frac{p}{q(w' + w)}$; deinde vero w ponatur $= 1$, ubi ergo pro $w' = 0$ habetur $l = \frac{p}{q}$, pro $w' = \infty$ erit $l = \frac{p}{q\infty} = 0$; pro $w' = 1$ erit $l = \frac{p}{2q}$.

§. 197. Tertio loco si et l et w mutantur, habebuntur aequationes (a) et (b) numeri 194 pro l' et pro w' . Hic tantum explicabimus casum, ubi assumitur $+l = \frac{p}{q}$ et $+w = 1$. Unde habetur aequatio $l' + \frac{p}{q} = \frac{p}{q(w' + 1)}$ sive $l' = \frac{-pw'}{q(w' + 1)}$ et $w' = \frac{-ql'}{ql' + p}$. Ergo est arcuum longitudinis initium in eo puncto pro quo in aequatione originaria antilogae w est $= 1$ et $l = \frac{p}{q}$; novaque directio fundamentalis in hoc ipso puncto a curva exprimitur. Unde sequens tabula eruitur.

l'	w'	l'	w'
0	- 0	- 0	+ 0
1	$\frac{-q}{q+p}$	- 1	$\frac{+q}{-q+p}$
2	$\frac{-2q}{2q+p}$	- 2	$\frac{+2q}{-2q+p}$
m	$\frac{-mq}{mq+q}$	- m	$\frac{+mq}{-mq+p}$
∞	- 1	- ∞	+ 1
+ p	$\frac{-q}{q+1}$	- p	$\frac{+q}{-q+1}$
+ q	$\frac{-q^2}{q^2+p}$	- q	$\frac{+q^2}{-q^2+p}$
+ $\frac{p}{q}$	$-\frac{1}{2}$	- $\frac{p}{q}$	+ ∞
+ $\frac{2p}{q}$	$-\frac{2}{3}$	- $\frac{2p}{q}$	- 2
+ $\frac{mp}{q}$	$-\frac{m}{m+1}$	- $\frac{mp}{q}$	$-\frac{m}{(m-1)}$
$\frac{p}{2q}$	$-\frac{1}{3}$	- $\frac{p}{2q}$	+ 1
$\frac{p}{3q}$	$-\frac{1}{4}$	- $\frac{p}{3q}$	+ $\frac{1}{2}$
$\frac{p}{mq}$	$-\frac{1}{m+1}$	- $\frac{p}{mq}$	$\frac{1}{m-1}$
$\frac{2p}{3q}$	$-\frac{2}{5}$	- $\frac{2p}{3q}$	+ 2
$\frac{3p}{4q}$	$-\frac{3}{7}$	- $\frac{3p}{4q}$	+ 3
+ $\frac{mp}{(m+1)q}$	$-\frac{m}{2m+1}$	- $\frac{mp}{(m+1)q}$	+ m

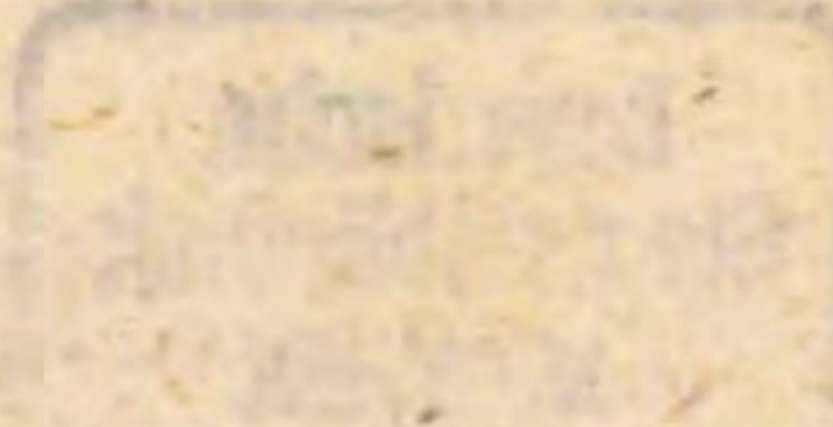


Si nunc etiam ponitur $\frac{p}{q} = 1$, ergo $p = 1$ et $q = 1$, hi valores ad multo simpliciores reducuntur.

1. Die bei der Drucklegung vorgefundenen Druckfehler sind in der folgenden Tabelle angegeben. 2. Die bei der Drucklegung vorgefundenen Druckfehler sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Pag.	Lin.	Errata.
11	12	lenea
11	13	mementa
11	18	quod
13	22	mngnitudinis
16	25	psrtes
27	29	$l = \infty$
32	18	Fig. 25, b
32	37	Fig. 25, a
32	42	Fig. 25, a
39	12	$\angle b p q$
40	21	$R a a' = 30^\circ$
44	36	dimidium ac
47	15	plene
49	13	db et bc
58	12	defi =
68	42	argulum α
70	28	simplicitur
72	30	linea l_{-1} decrescit
72	30	eadem crescit

Corrige.
linea
momenta
quoad
magnitudinis
partes
$l = - \infty$
Fig. 25, a
Fig. 25, b
Fig. 25, b
$\angle b q p$
$R a a' = 90^\circ$
duplum ac
plane
db et be
de =
angulum α
simpliciter
linea l_{-1} crescit
eadem decrescit.



Verzeichniss

sämmtlicher

bereits früher erschienenen philosophischen, mathematischen und geschichtlichen Schriften *Krause's*.

Anmerk. 1) Die bei Gabler erschienenen Schriften sind jetzt in der *Dyk'schen* Buchhandlung zu Leipzig zu haben.

2) Die mit * bezeichneten Nummern sind bereits vergriffen, oder doch nur noch in wenigen Exemplaren vorrätig.

- *1. *Dissertatio philosophico-mathematica de Philosophiae et Mathematicae notione et earum intima conjunctione.* Jenae, apud Voigtium, 1802. 6 gr. sächs. od. 27 kr. rhein.
 2. *Grundlage des Naturrechts, oder philosophischer Grundriffs des Ideales des Rechts. Erste Abtheilung.* Jena, 1803, bei Gabler. 1 Thlr. od. 1 fl. 48 kr.
 3. *Grundriffs der historischen Logik für Vorlesungen, nebst zwei Kupfertafeln, worauf die Verhältnisse der Begriffe und der Schlüsse combinatorisch vollständig dargestellt sind.* Jena, bei Gabler, 1803. 1 Thlr. 12 gr. od. 2 fl. 42 kr.
 - *4. *Grundlage eines philosophischen Systemes der Mathematik; erster Theil, enthaltend eine Abhandlung über den Begriff und die Eintheilung der Mathematik und der Arithmetik, erste Abtheilung; zum Selbstunterrichte und zum Gebrauche bei Vorlesungen, mit 2 Kupfertafeln.* Jena und Leipzig, bei Gabler, 1808. 1 Thlr. 16 gr. od. 3 fl.
 5. *Factoren und Primzahlentafeln, von 1 bis 100,000 Neuberechnet, und zweckmäfsig eingerichtet, nebst einer Gebrauchsanleitung und Abhandlung der Lehre von Factoren und Primzahlen, worin diese Lehre nach einer neuen Methode abgehandelt, und die Frage über das Gesetz der Primzahlenreihe entschieden ist.* Jena und Leipzig, bei Gabler, 1804. 1 Thlr. 16 gr. od. 3 fl.
 - *6. *Entwurf des Systemes der Philosophie; erste Abtheilung, enthaltend die allgemeine Philosophie, nebst einer Anleitung zur Naturphilosophie. Für Vorlesungen, Jena und Leipzig, bei Gabler, 1804. 16 gr. od. 1 fl. 12 kr.*
 - *7. *Die drei ältesten Kunsturkunden der Freimaurerbrüderschaft, mitgetheilt, bearbeitet und durch eine Darstellung des Wesens und der Bestimmung der Freimaurerei und der Freimaurerbrüderschaft, sowie durch mehrer liturgische Versuche, erläutert von Br. Krause. Erster Band, Dresden 1810 (596 u. LXVIII Seiten, mit 3 Kupfertafeln). Desselben Werkes zweiter Band, enthaltend die geschichtlichen Belege, und erläuternde Abhandlungen, zu den drei ältesten Kunsturkunden, Dresden 1813. (543 u. XXX Seiten). Beide Bände zusammen kosteten 7 Thlr. 1 gr., der zweite Band allein 3 Thlr. 12 gr. (Vergl. No. 17.)*
 8. *Geschichte der Freimaurerei; aus authentischen Quellen, nebst einem Berichte über die große Loge in Schottland, von ihrer Stiftung bis auf die gegenwärtige Zeit und einem Anhange von Originalpapieren, Edinburgh, durch Alexander Lawrie, übersetzt von D. Burkhard, mit erklärenden, berichtigenden und erweiternden Anmerkungen und einer Vorrede von D. Krause, Freiberg bei Craz und Gerlach, 1810. 1 Thlr. 16 gr. od. 3 fl.*
(Dieses Buch wird, sowie mehrere andre über Krause's masonisches Wirken in demselben Verlage erschienene Schriften, auch an Nichtmaurer abgegeben).
 9. *System der Sittenlehre; erster Band, wissenschaftliche Begründung der Sittenlehre. Leipzig bei Reclam, 1810. 2 Thlr. od. 3 fl. 36 kr.*
 - *10. *Tagblatt des Menschheitslebens; erster Vierteljahrgang 1811. Dresden in der Arnoldischen Buchhandlung und bei dem Herausgeber D. Krause. Nebst 26 Stücken eines literarischen Anzeigers. (Enthält mehrer wissenschaftliche Abhandlungen des Herausgebers über Mathematik, Naturrecht, Geschichte, Geographie, Musik etc.) 1 Thlr. 12 gr. od. 2 fl. 42 kr.*
 11. *Das Urbild der Menschheit, ein Versuch. Dresden bei Arnold, 1811. (552 Seiten). 2 Thlr. 8 gr. od. 4 fl. 12 kr.*
 12. *Lehrbuch der Combinationlehre und der Arithmetik als Grundlage des Lehrvortrages und des Selbstunterrichtes, nebst einer neuen und faßlichen Darstellung der Lehre vom Unendlichen und Endlichen, und einem Elementarbeweise des binomischen und polynomischen Lehrsatzes, bearbeitet von L. Jos. Fischer und D. Krause, nach dem Plane und mit einer Vorrede und Einleitung des Letzteren. Erster Band. Dresden in der Arnoldischen Buchhandlung, 1812. 2 Thlr. od. 3 fl. 36 kr.*
 13. *Oratio de scientia humana, et de via ad eam perveniendi, habita Berolini 1814. Venditur Berolini in Bibliopolio Maureriano. 4 gr. od. 18 kr.*
 14. *Von der Würde der deutschen Sprache und von der höheren Ausbildung derselben überhaupt, und als Wissenschaftssprache insbesondere. Dresden, 1816. 10 gr. od. 45 kr.*
 15. *Ansführliche Ankündigung eines neuen vollständigen Wörterbuches oder Urwortthumes der deutschen Volksprache. Dresden, bei Arnold und bei dem Verfasser, 1816. (32 S. gr. 8.) 2 gr. od. 9 kr.*
 16. *Höhere Vergeistigung der echtüberlieferten Grundsymbole der Freimaurerei in zwölf Logenvorträgen von dem Br. Krause; 3te, unveränderte, mit einer Uebersicht des Zweckes und Inhaltes der Schrift über die drei ältesten Kunsturkunden vermehrte Ausgabe. Bei dem Verfasser und Dresden bei Arnold, 1820. (Die erste Ausgabe erschien im Jahre 1809.) 1 Thlr. od. 1 fl. 48 kr.*
 17. *Die drei ältesten Kunsturkunden der Freimaurerbrüderschaft, mitgetheilt, bearbeitet und in einem Lehrfragstücke unvergeistigt von dem Br. Krause. In zwei Bänden, oder vier Abtheilungen. Zweite um das Doppelte vermehrte, mit dem Lehrlingsrituale des neuenglischen Zweiges der Brüderschaft, sowie mit einigen andern Kunsturkunden und Abhandlungen, vermehrte Ausgabe, Dresden 1819 — 1821, im Verlage der Arnoldischen Buchhandlung. 10 Thlr. od. 18 fl.*
(Nichtmaurer können diese Werke am sichersten direct von der Verlagshandlung beziehen, an welche sie den Betrag *postfrei* einzusenden haben.)
 - *18. *Theses philosophicae XXV. Göttingae 1824. Eine Uebersetzung mit späteren Anmerkungen des Verfassers siehe in der Isis vom Jahr 1832. Heft X.*
 19. *Abriss des Systemes der Philosophie, erste Abtheilung: analytische Philosophie, 1825. Göttingen, in Commission der Dietrich'schen Buchhandlung. 12 gr. od. 54 kr.*
 20. *Darstellungen aus der Geschichte der Musik nebst vorbereitenden Lehren aus der Theorie der Musik. Göttingen, in der Dietrich'schen Buchhandlung. 1827. 12 gr. od. 54 kr.*
 21. *Abriss des Systemes der Logik, zweite mit der metaphysischen Grundlegung der Logik, und einer dritten Steindrucktafel vermehrte Ausgabe, 1828. Ebendasselbst. 1 Thlr. od. 1 fl. 48 kr.*
 22. *Abriss des Systemes der Rechtsphilosophie oder des Naturrechts, 1828. Ebendasselbst in Commission. 1 Thlr. od. 1 fl. 48 kr.*
 23. *Vorlesungen über das System der Philosophie, 1828. Ebendasselbst in Commission. 2 Thlr. 6 gr. od. 4 fl. 3 kr.*
 24. *Vorlesungen über die Grundwahrheiten der Wissenschaft, zugleich in ihrer Beziehung zu dem Leben. Nebst einer kurzen Darstellung und Würdigung der bisherigen Systeme der Philosophie, vorzüglich der neusten von Kant, Fichte, Schelling und Hegel, und der Lehre Jacobi's. Ebendasselbst in Commission. 1829. 2 Thlr. 6 gr. od. 4 fl. 3 kr.*
- Vom handschriftlichen Nachlasse sind bereits erschienen:*
1. *Vorlesungen über die analytische Logik und die Encyclopädie der Philosophie, oder die Lehre vom Erkennen und der Erkenntniß, für Gebildete aus allen Ständen. Göttingen, in Commission der Dietrich'schen Buchhandlung. 3 Thlr. od. 5 fl. 24 kr.*
 2. *Die absolute Religionsphilosophie im Verhältniß zum gefühlgläubigen Theismus, und nach ihrer Vermittelung des Supernaturalismus und des Rationalismus. Erster Band. Dresden und Leipzig in Commission bei Arnold. 3 Thlr. od. 5 fl. 24 kr.*
 3. *Vorlesungen über die reine, apriorische, Philosophie der Geschichte, oder Geist der Geschichte der Menschheit. Für Gebildete aus allen Ständen. Göttingen, in Commission der Dietrich'schen Buchhandlung. 3 Thlr. 8 gr. od. 4 fl. 12 kr.*
- Ueber Krause's wissenschaftliches, menschheitliches und masonisches Streben und Wirken siehe den ausführlichen, meist von ihm selbst herrührenden Artikel: Krause in: Lenning's Encyclopädie der Freimaurerei (3 Bände), Leipzig bei Brockhaus, (jetzt zu dem herabgesetzten Preise von 5 Thlr. auch für Nichtmaurer). Ferner: Augsburger allgemeine Zeitung vom J. 1833, außerordentliche Beilage No. 125 — 127. Neuer Nekrolog der Deutschen, zehnter Jahrgang, 2r. Bd., S. 684 — 690 und Allgemeiner Anzeiger der Deutschen (Gotha), v. J. 1832 No. 163 u. 167. Freimaurerzeitung Heft III.
- Ein wohl gelungenes lithographirtes Bildniß Krause's auf chinesischem Papier ist für 16 gr. od. 1 fl. 12 kr. von der Arnoldischen Buchhandlung in Dresden zu beziehen.

Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3. a.

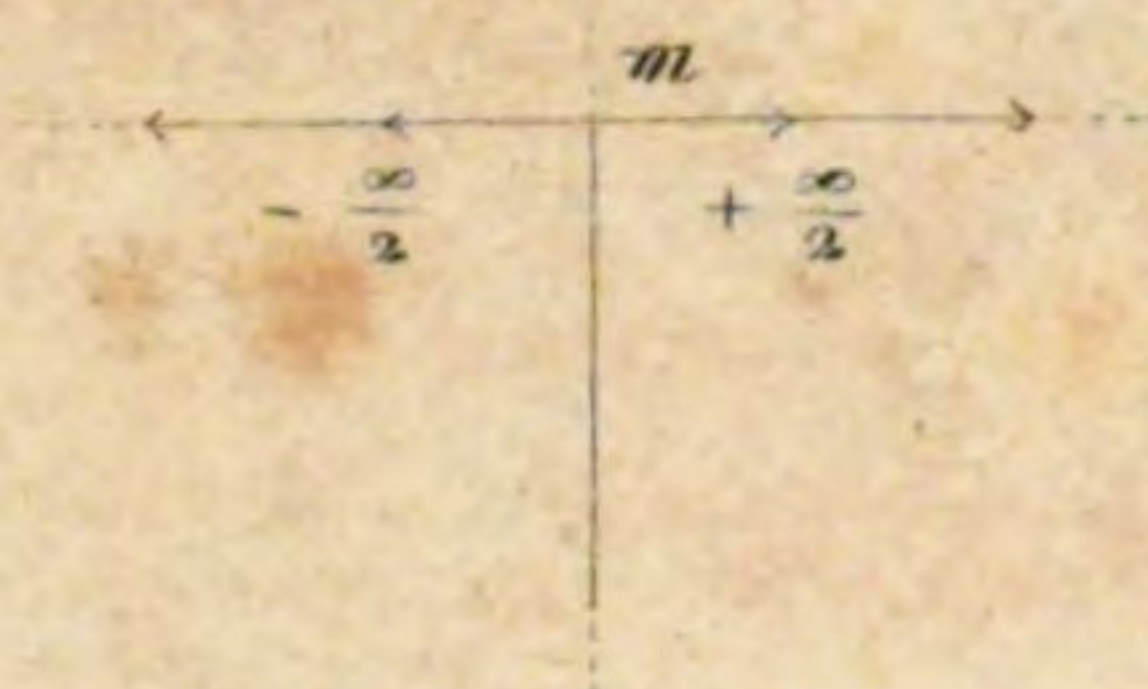


Fig. 3. b.



Fig. 4.

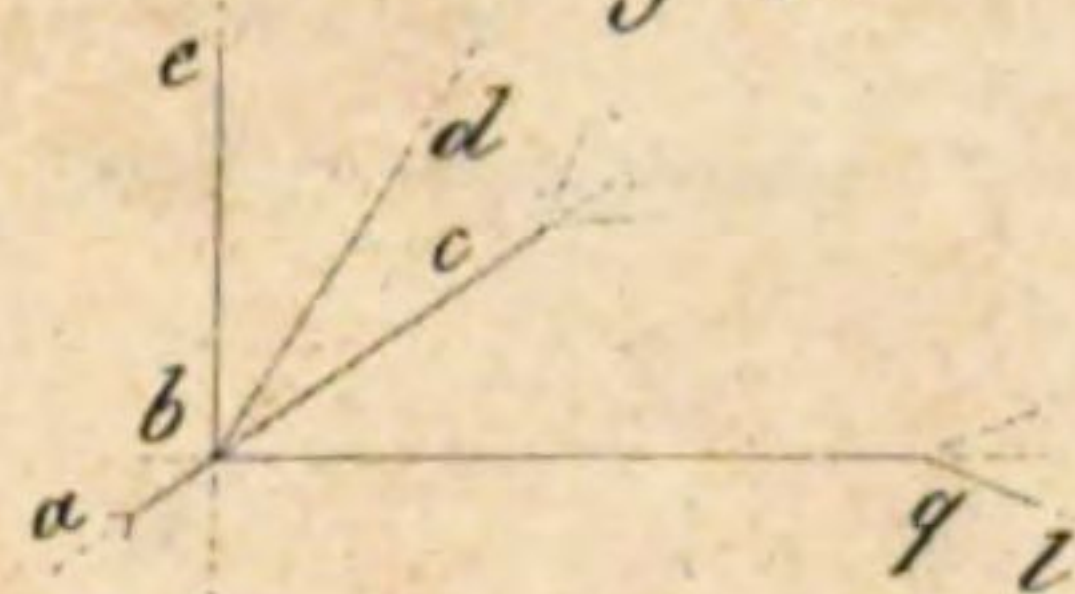


Fig. 5. a.

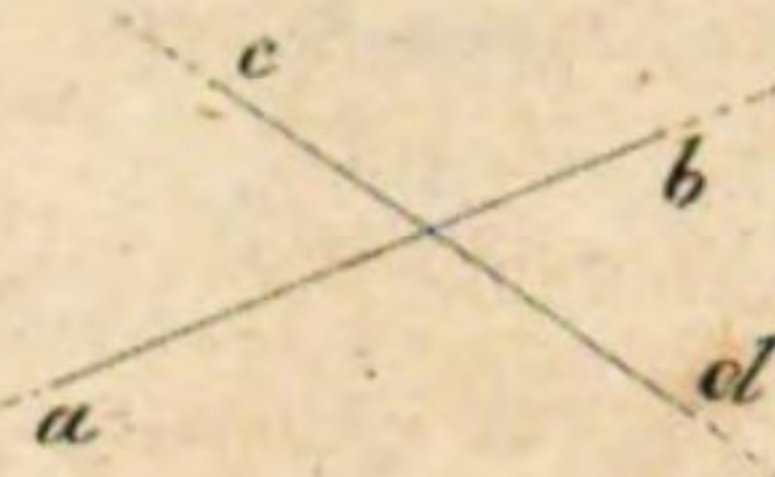


Fig. 5. b.

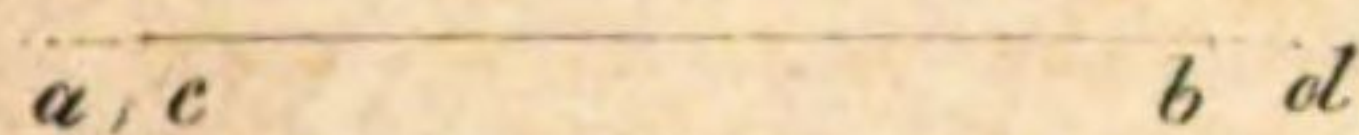


Fig. 5. c.



Fig. 5. d.

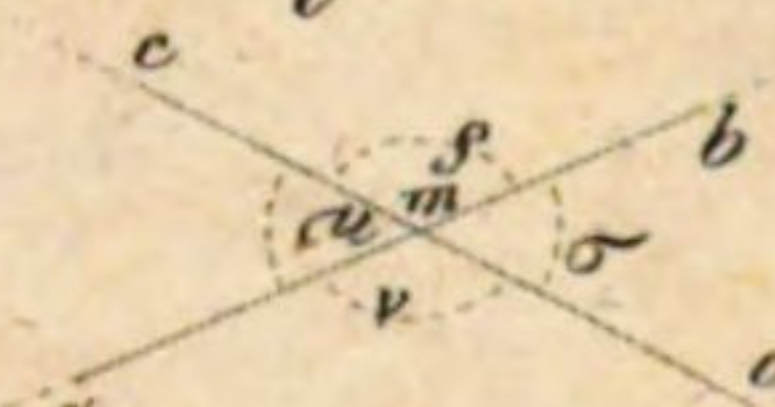


Fig. 6.

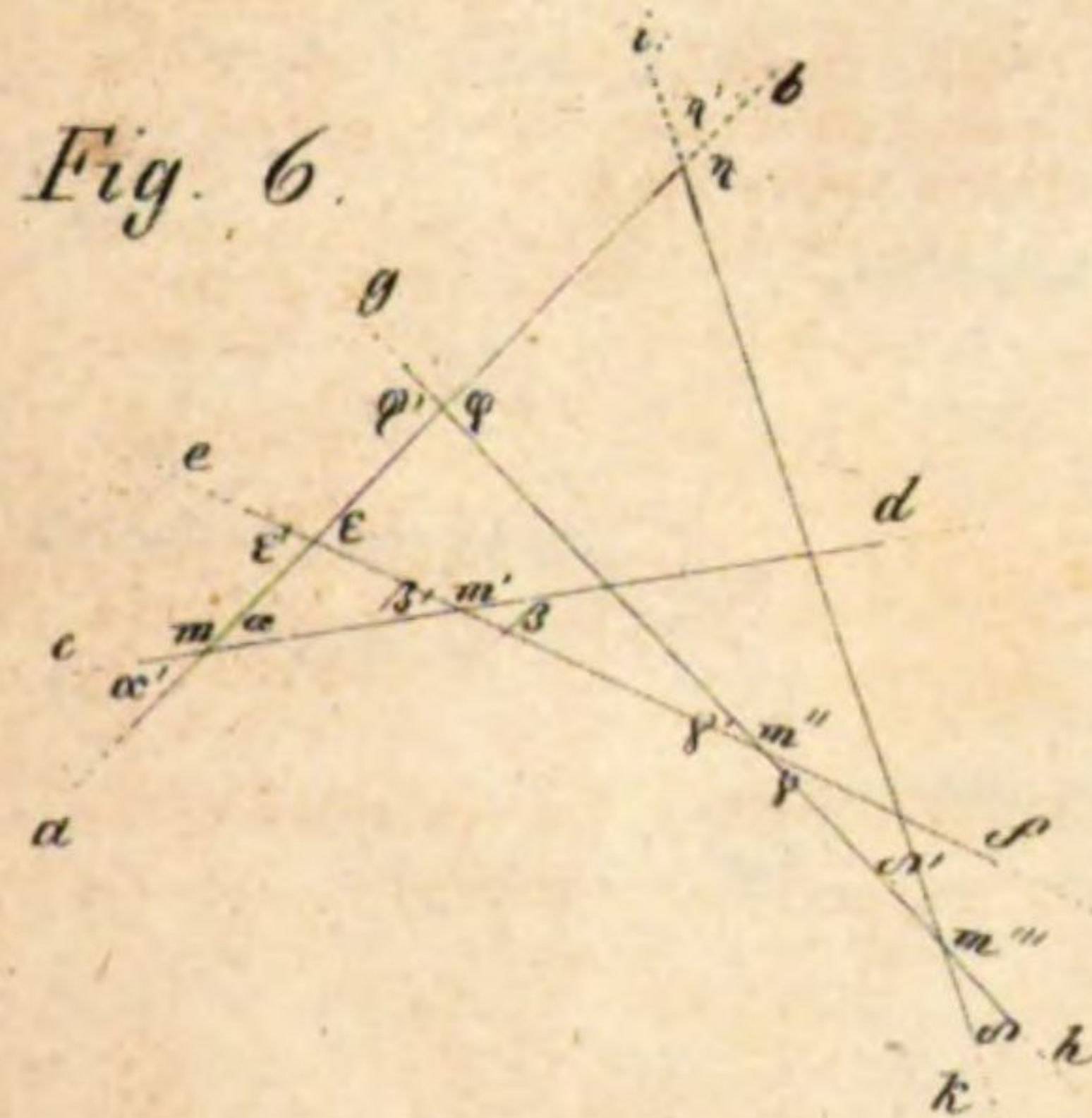


Fig. 5. e.

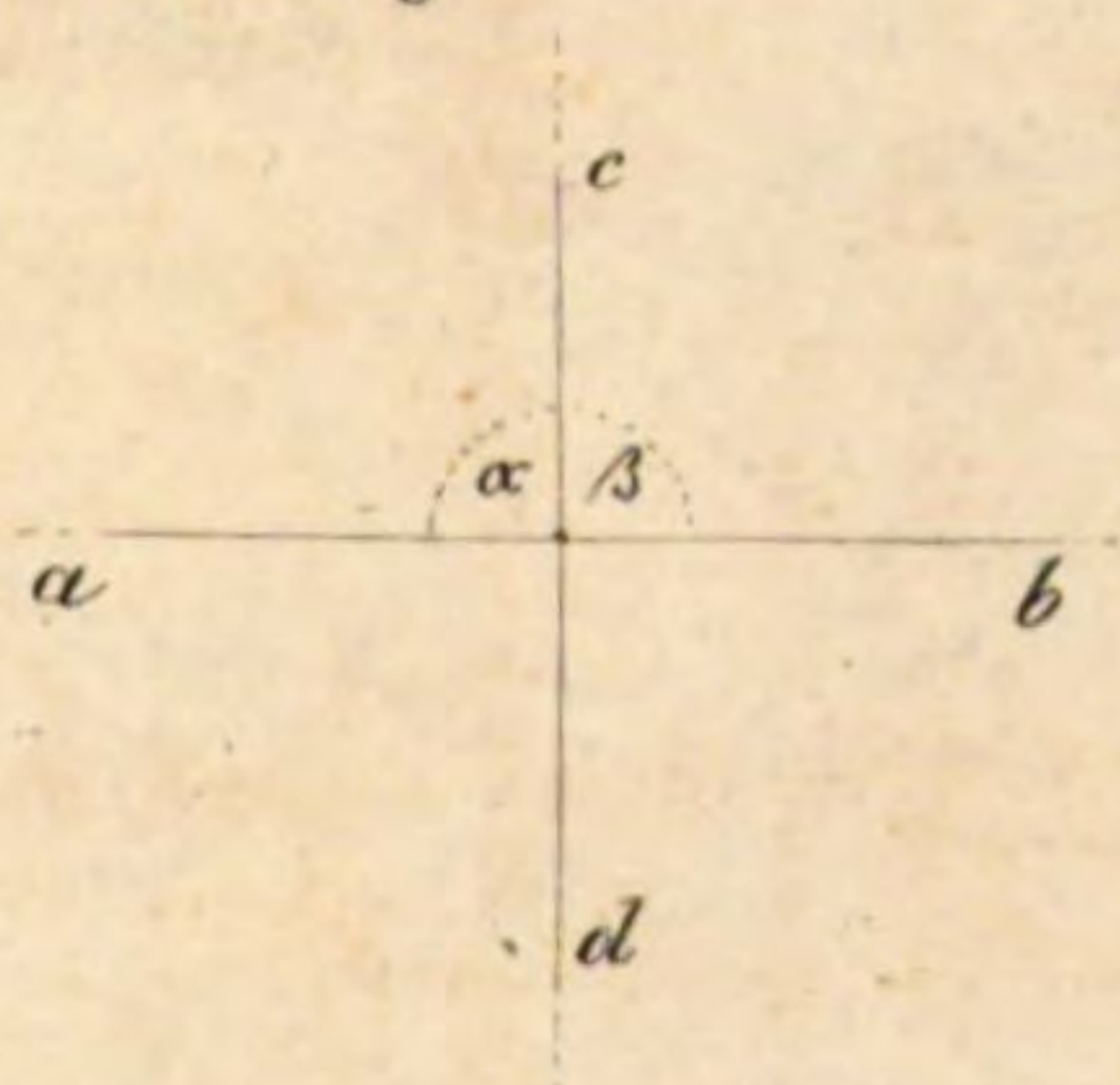


Fig. 7. a.

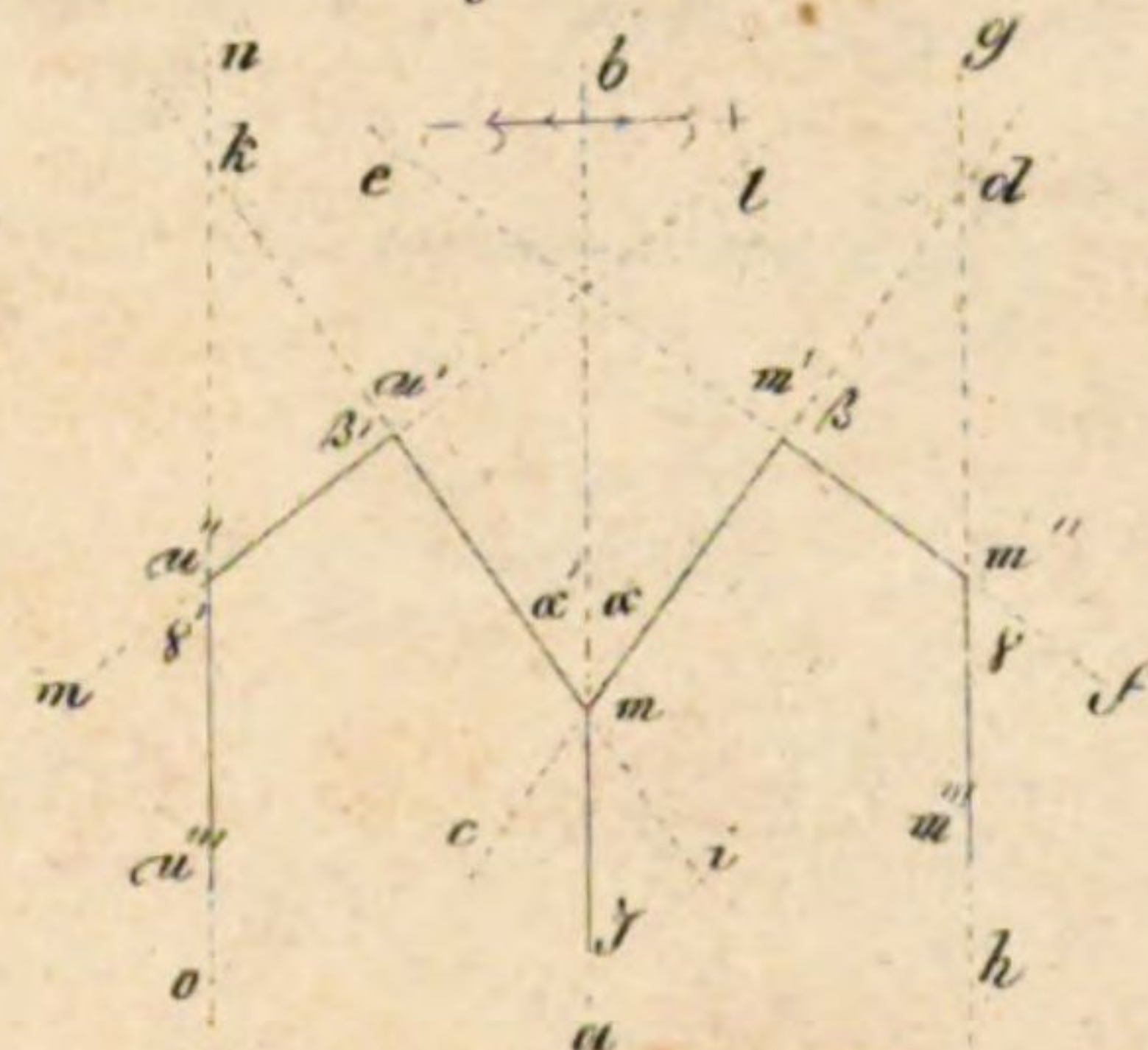


Fig. 7. c.

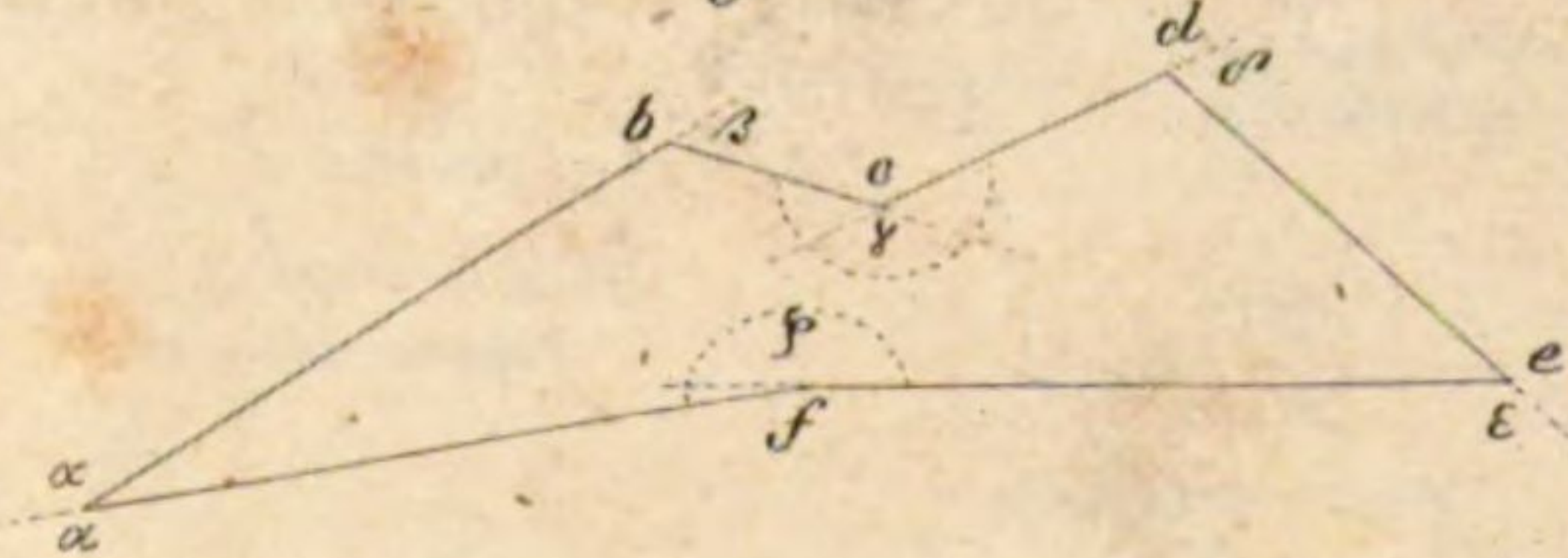


Fig. 7. b.

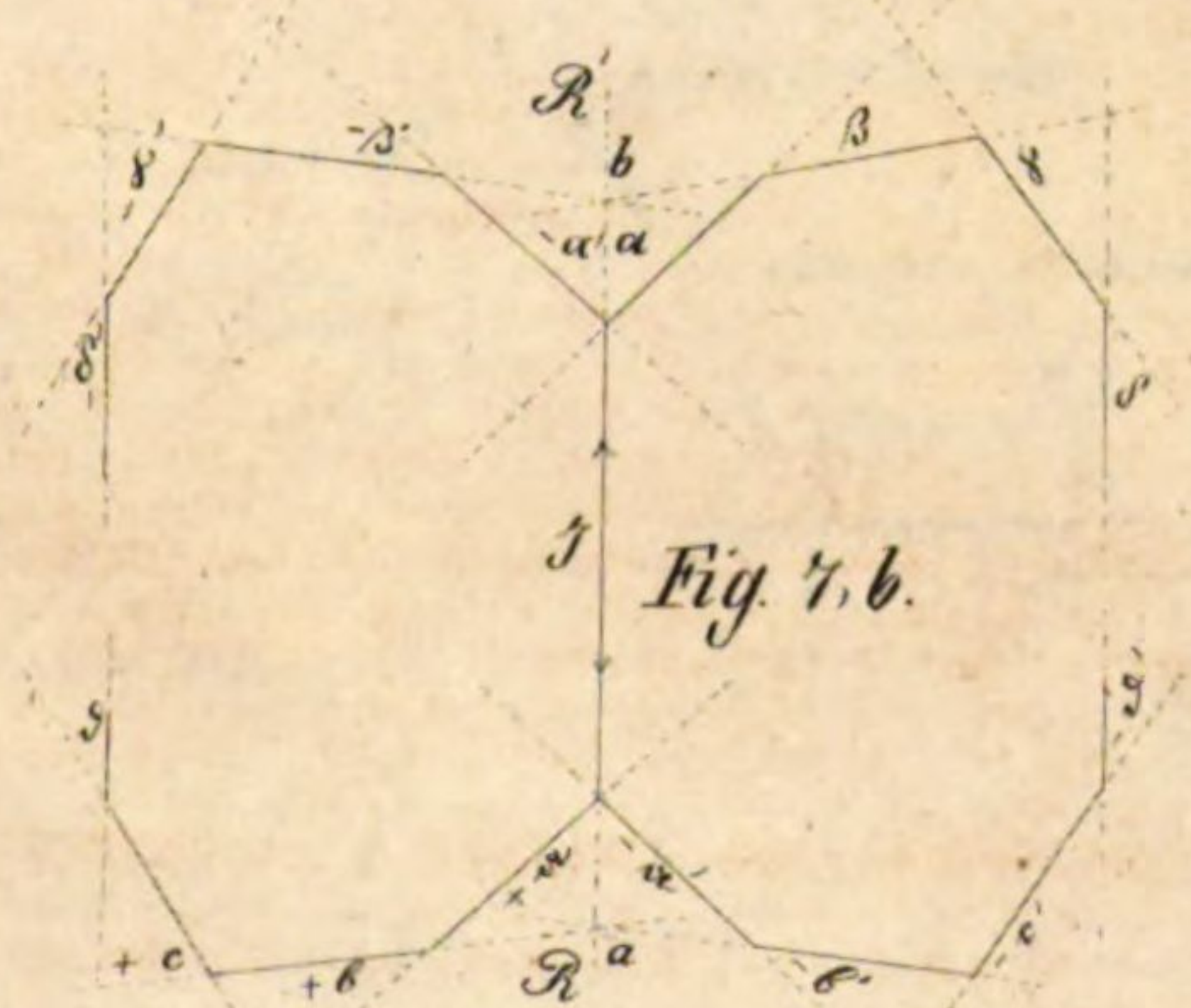


Fig. 8. a.

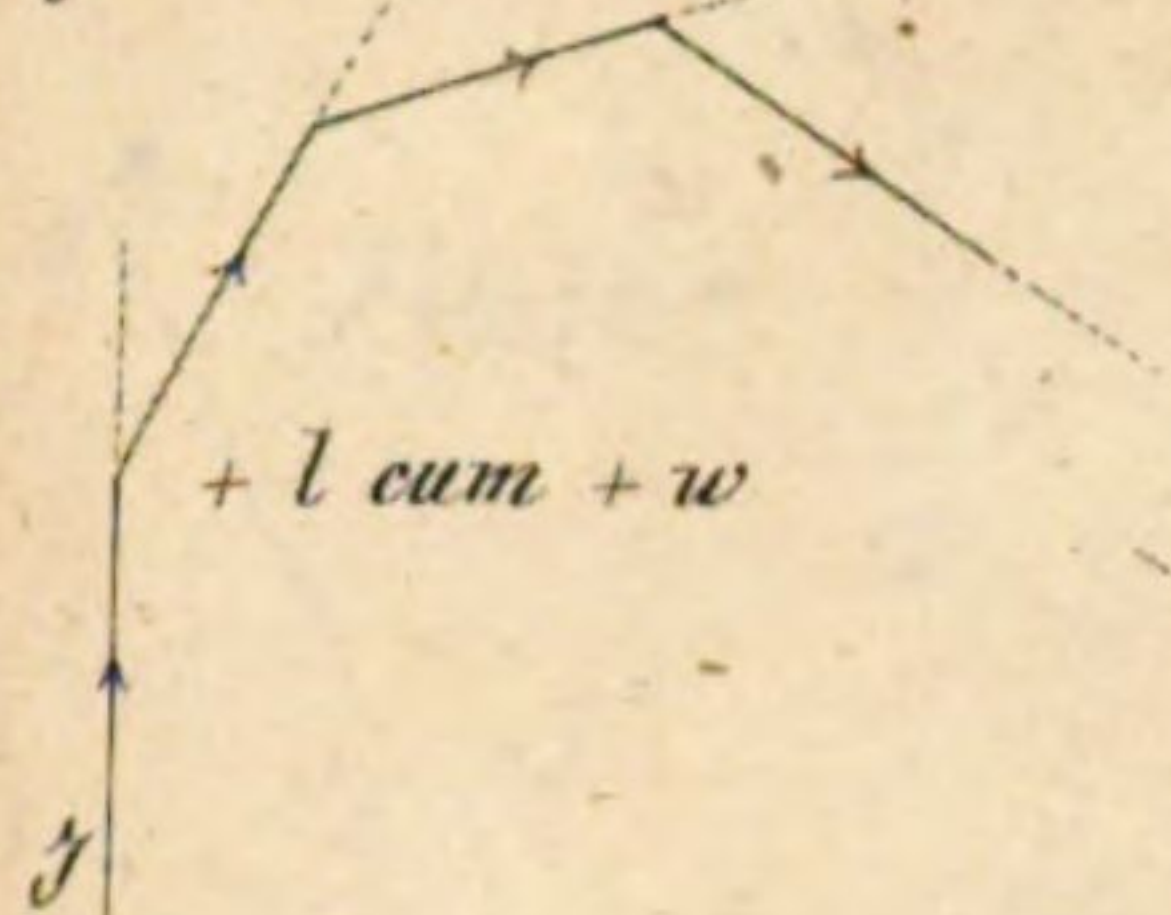


Fig. 8. c.

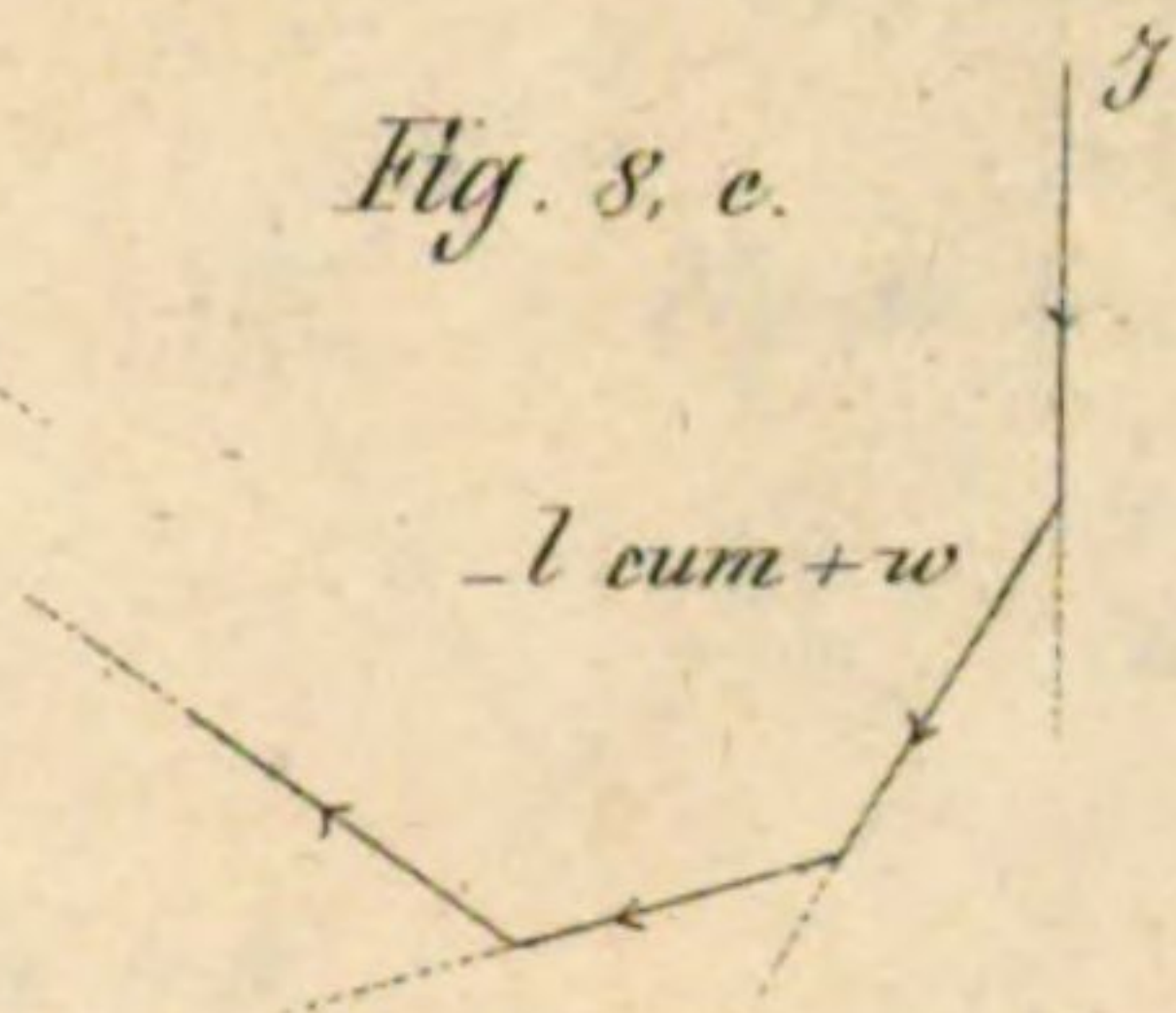


Fig. 8. d.

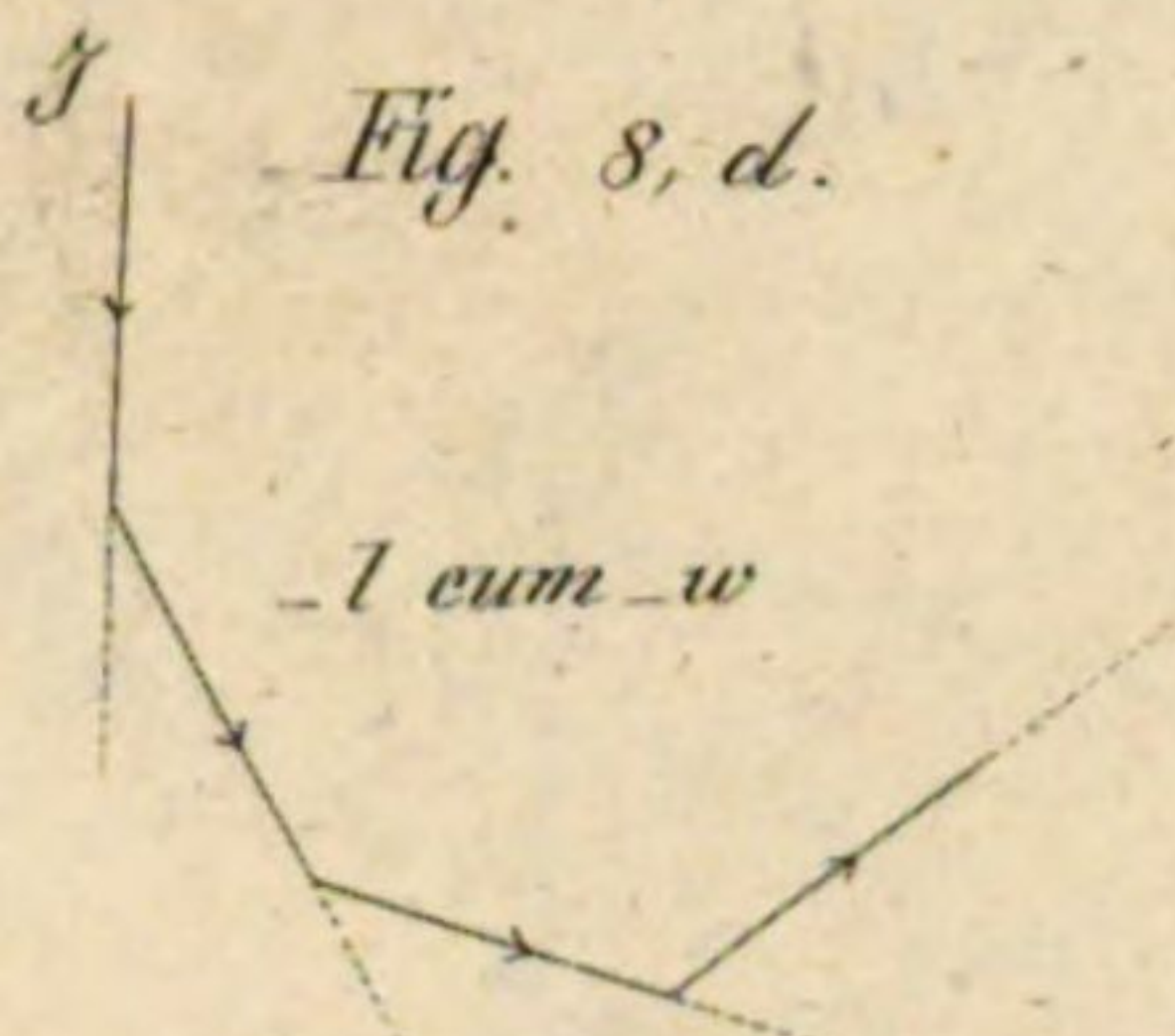


Fig. 8. b.

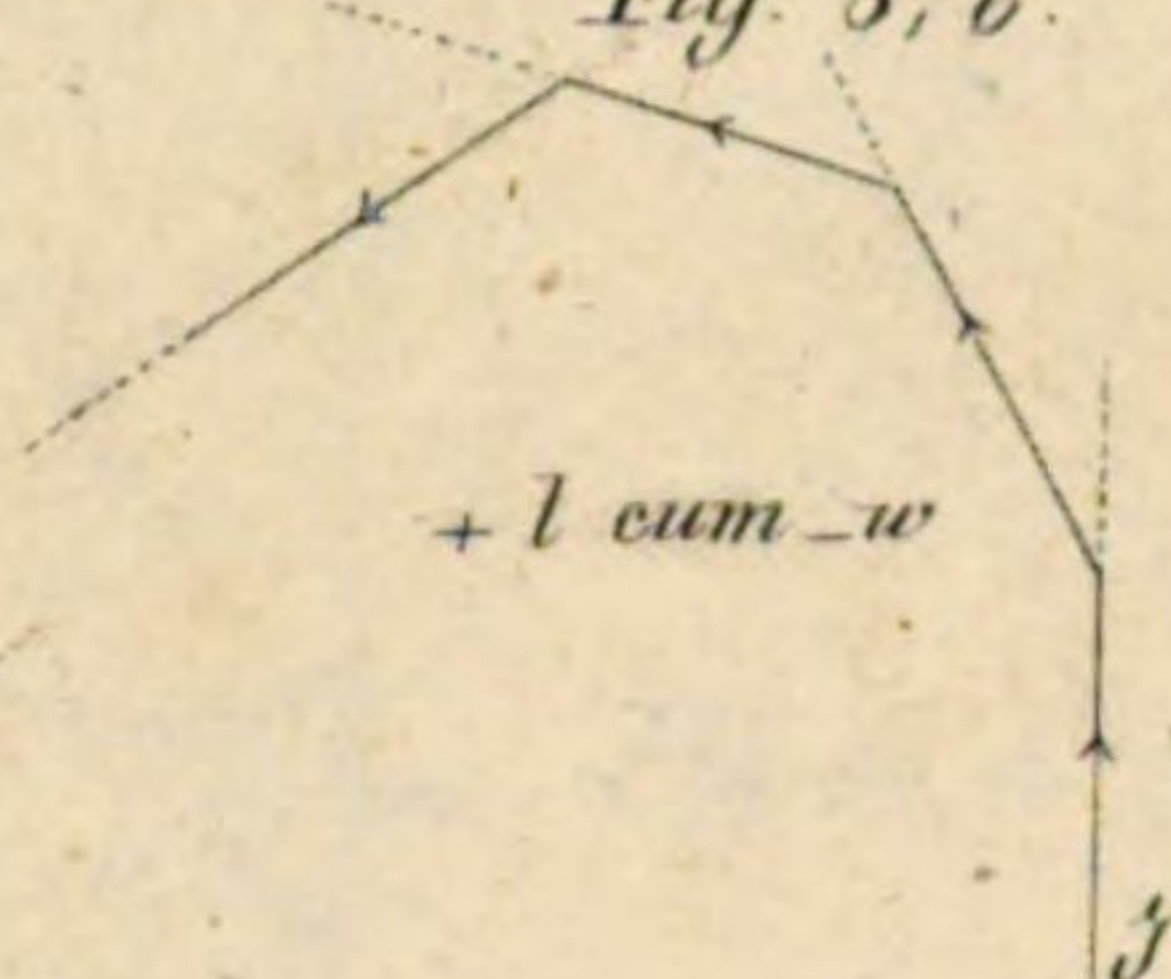


Fig. 9. a.

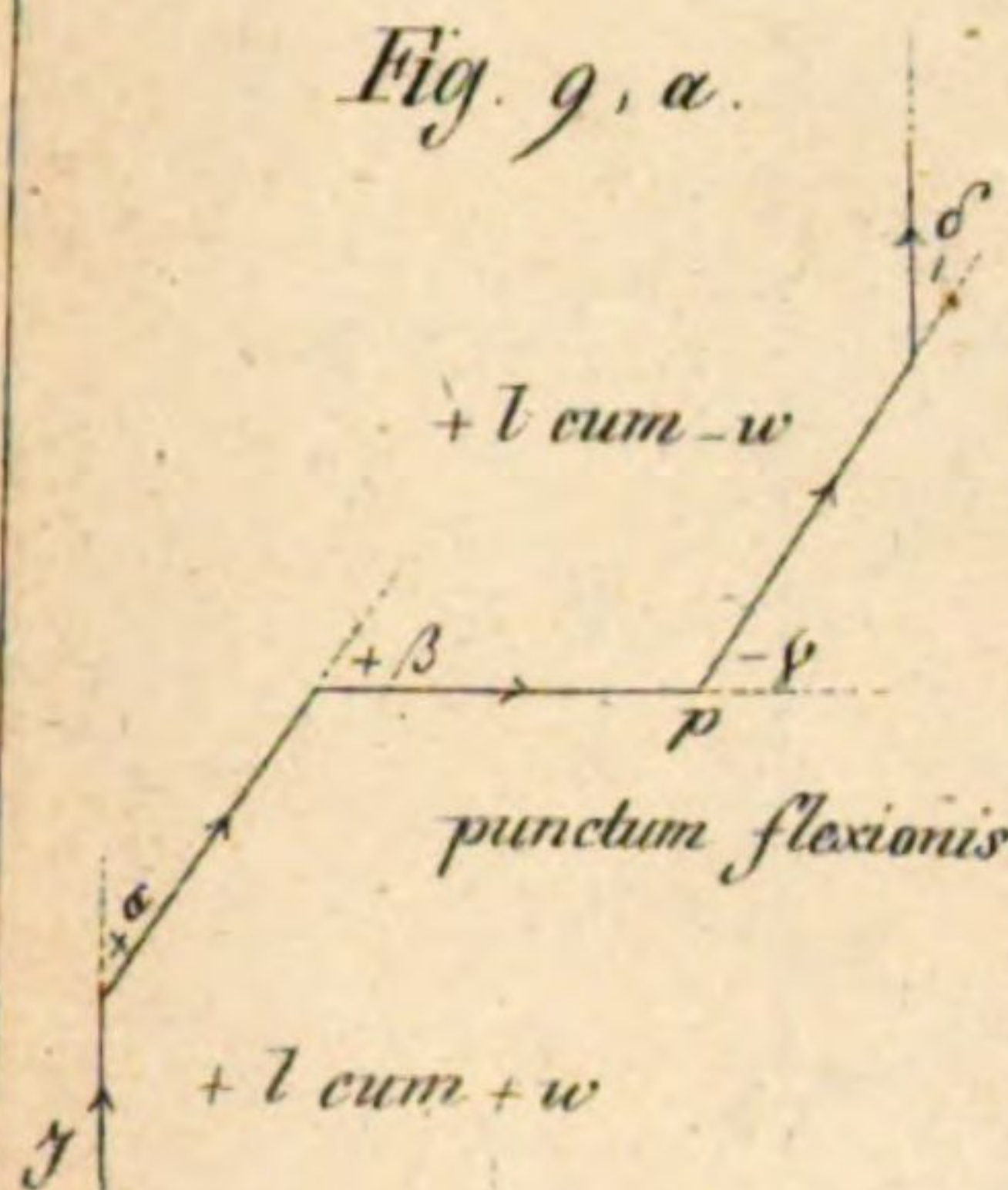


Fig. 9. b.



Fig. 9. c.



Fig. 9. d.



Fig. 9. e.

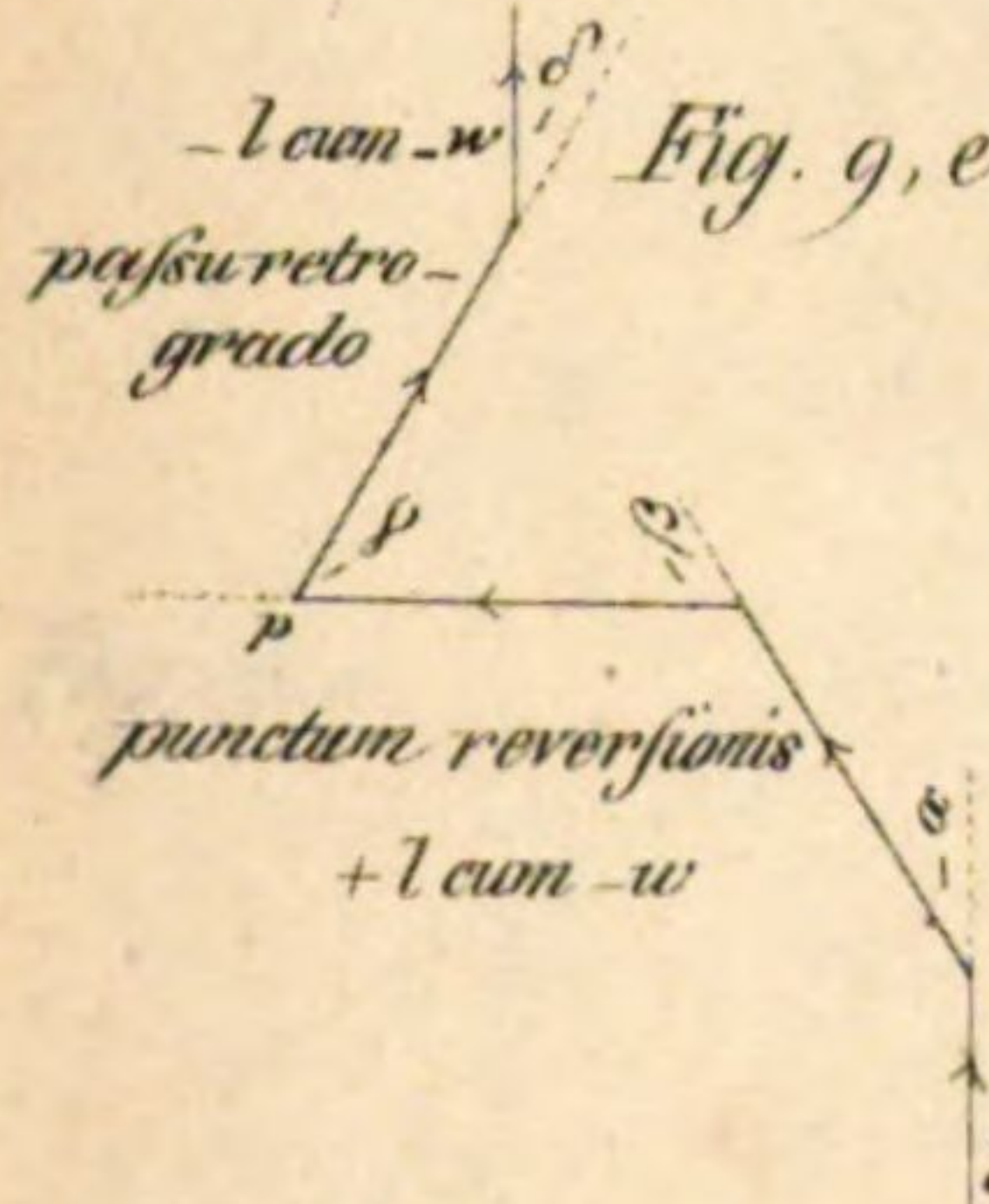


Fig. 9. f.

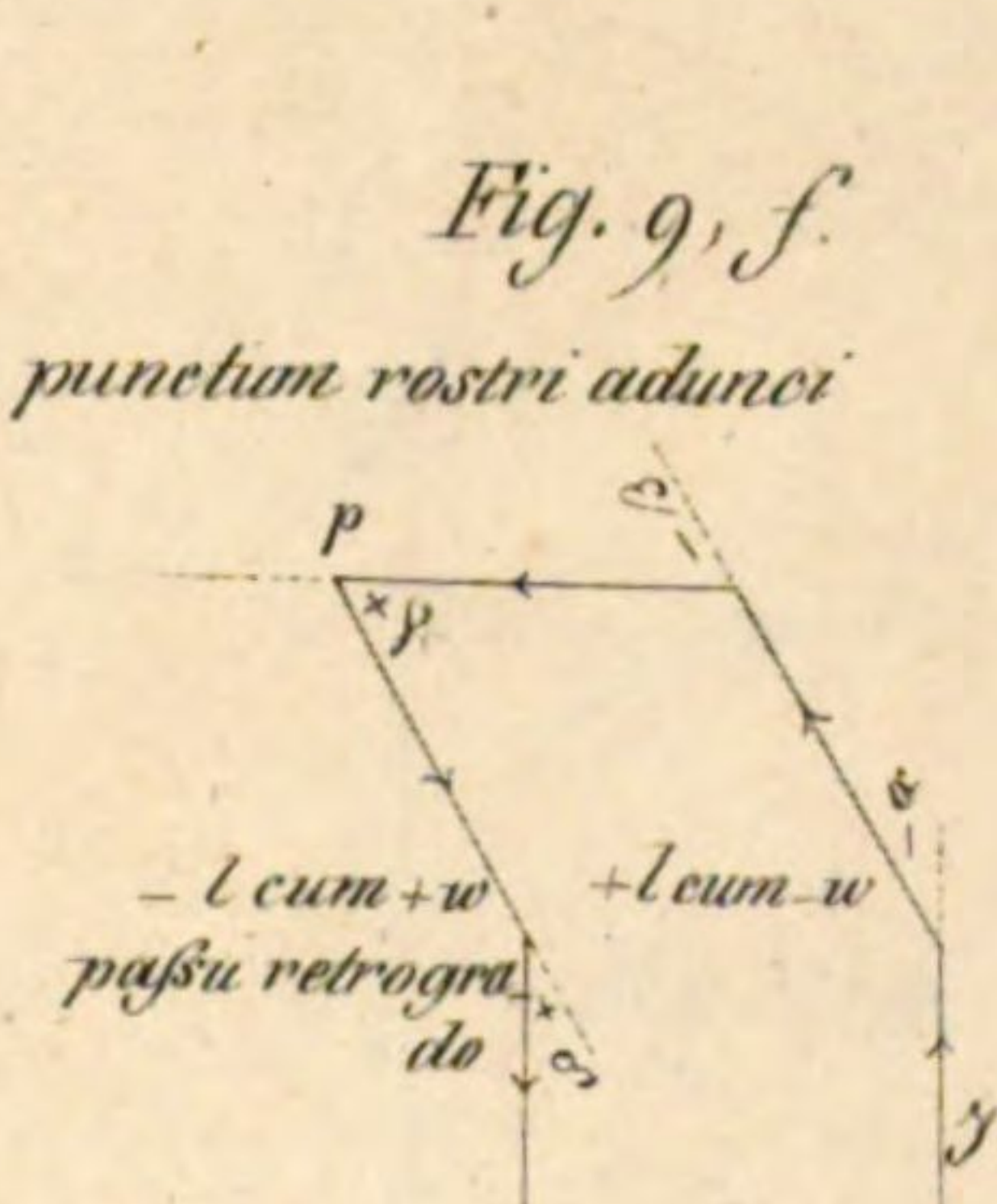


Fig. 9. g.

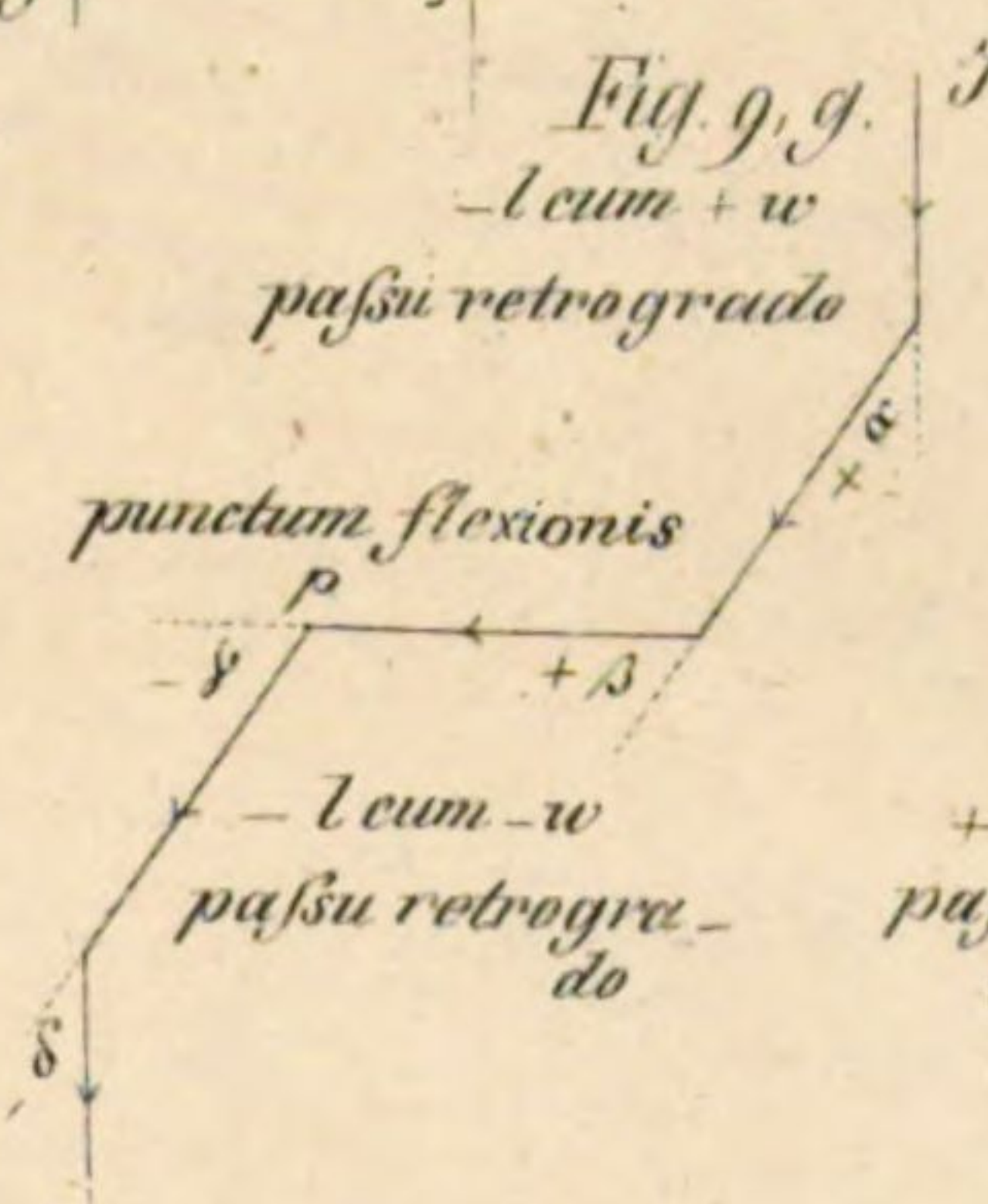


Fig. 9. h.

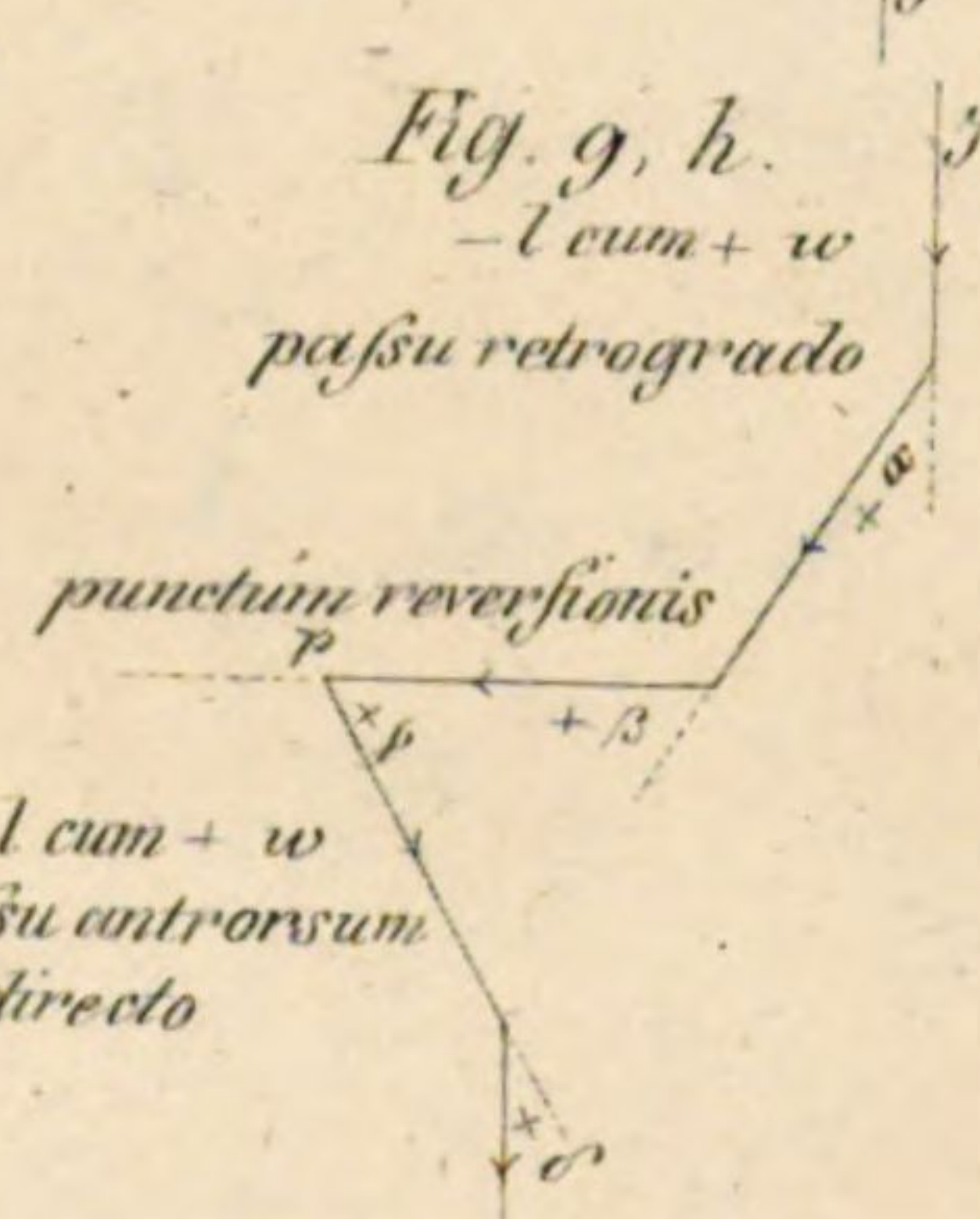


Fig. 9. i.



Fig. 9. k.



Fig. 9. l.

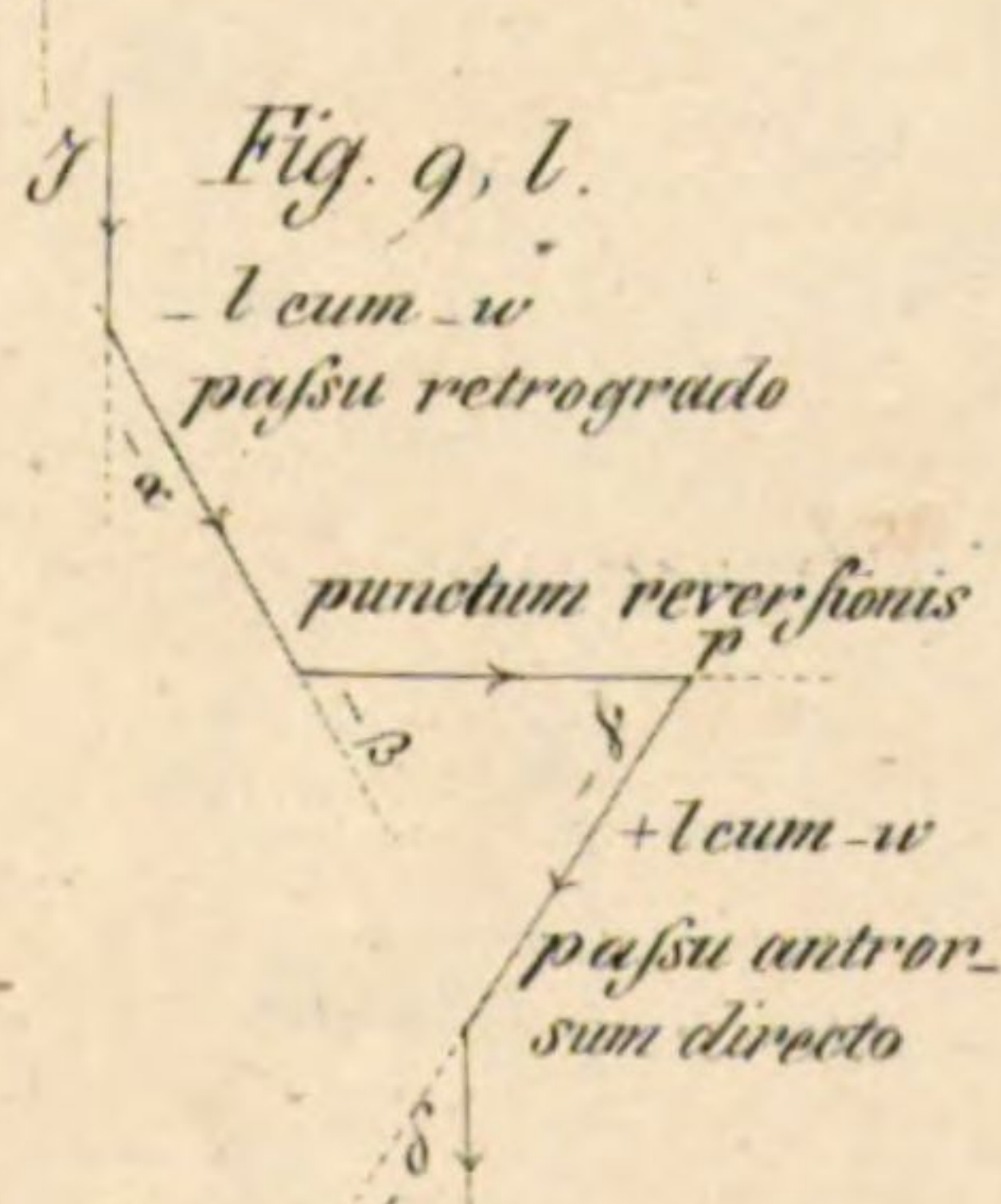
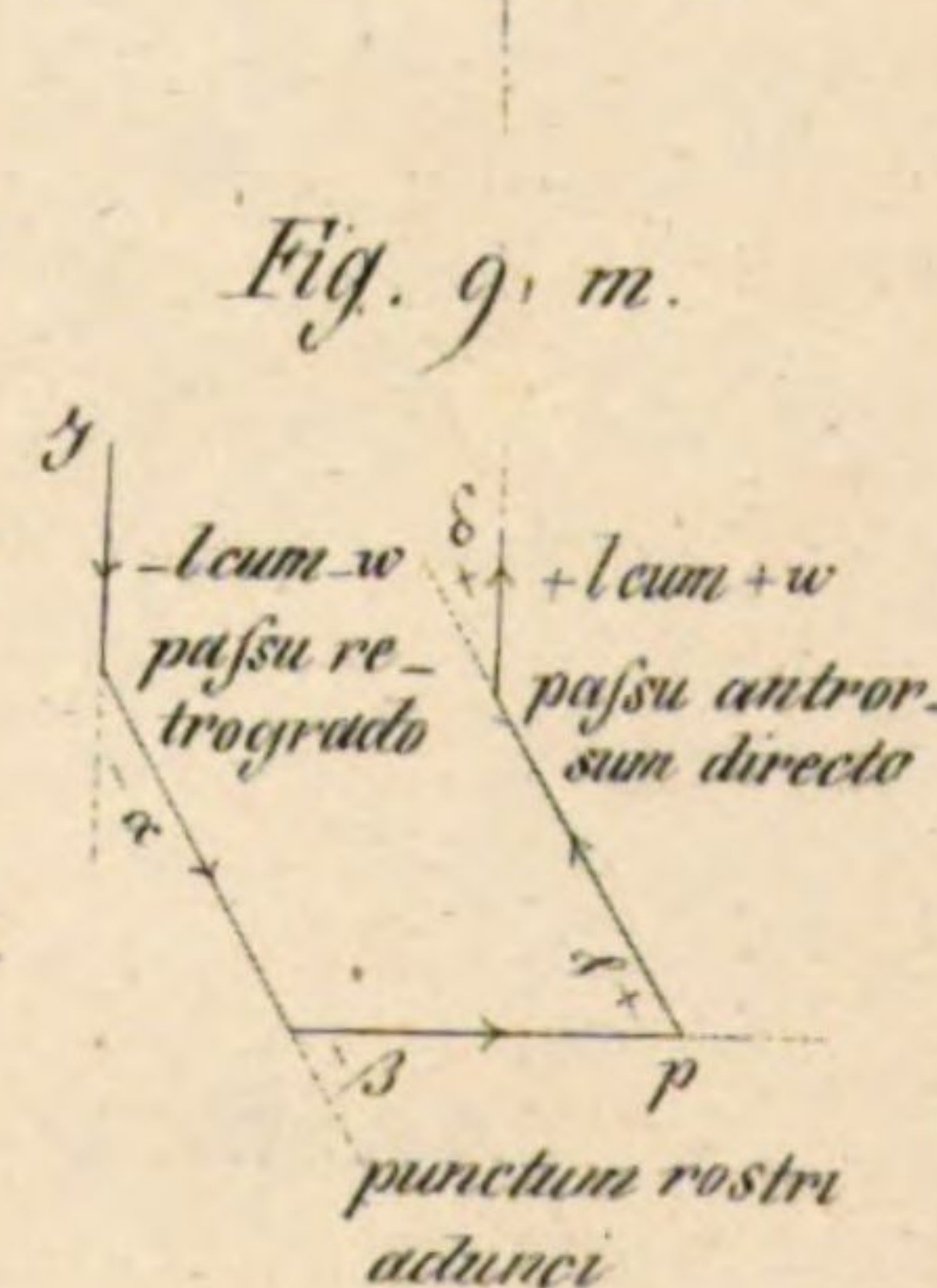


Fig. 9. m.



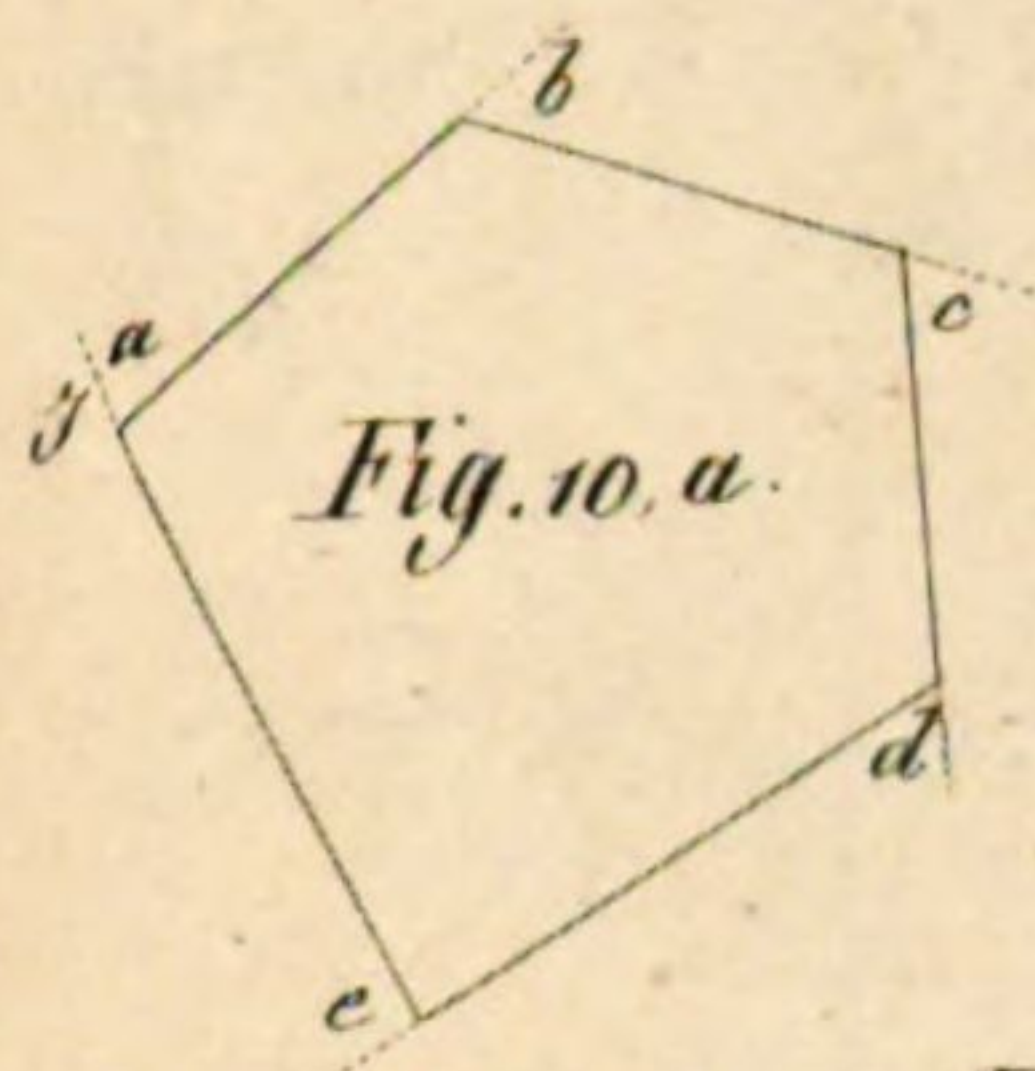


Fig. 10. a.

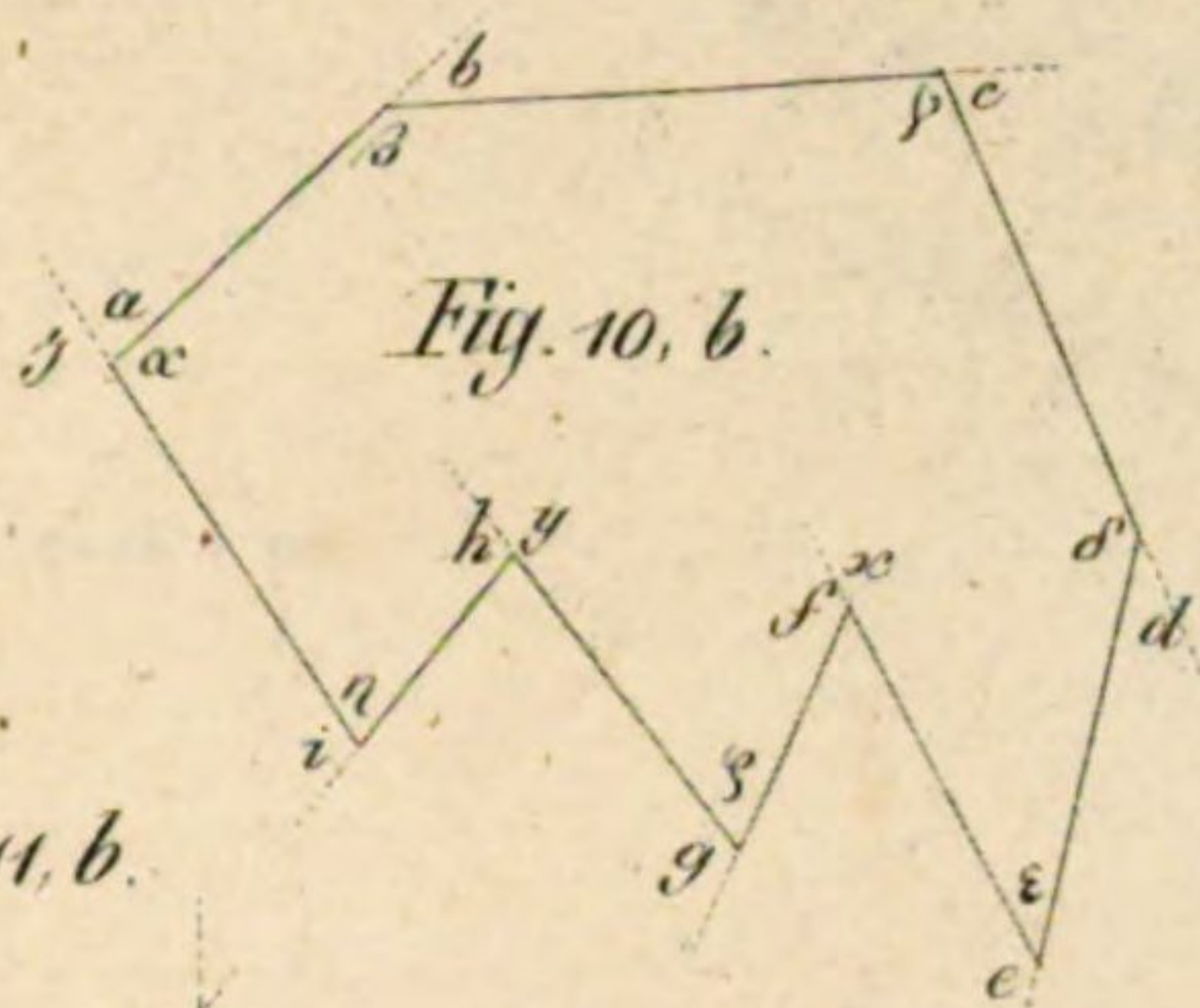


Fig. 10. b.

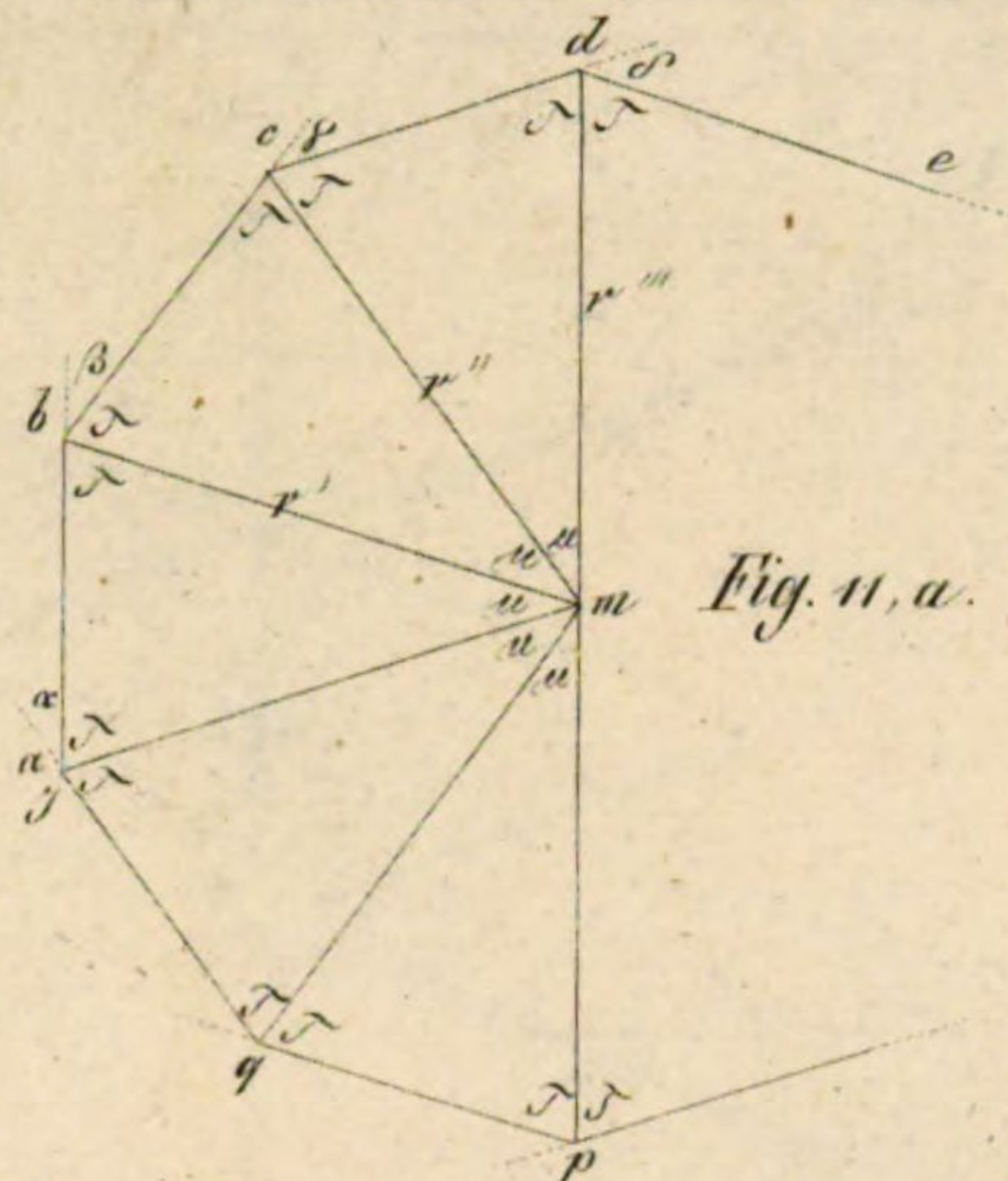


Fig. 11. a.

Fig. 11. b.

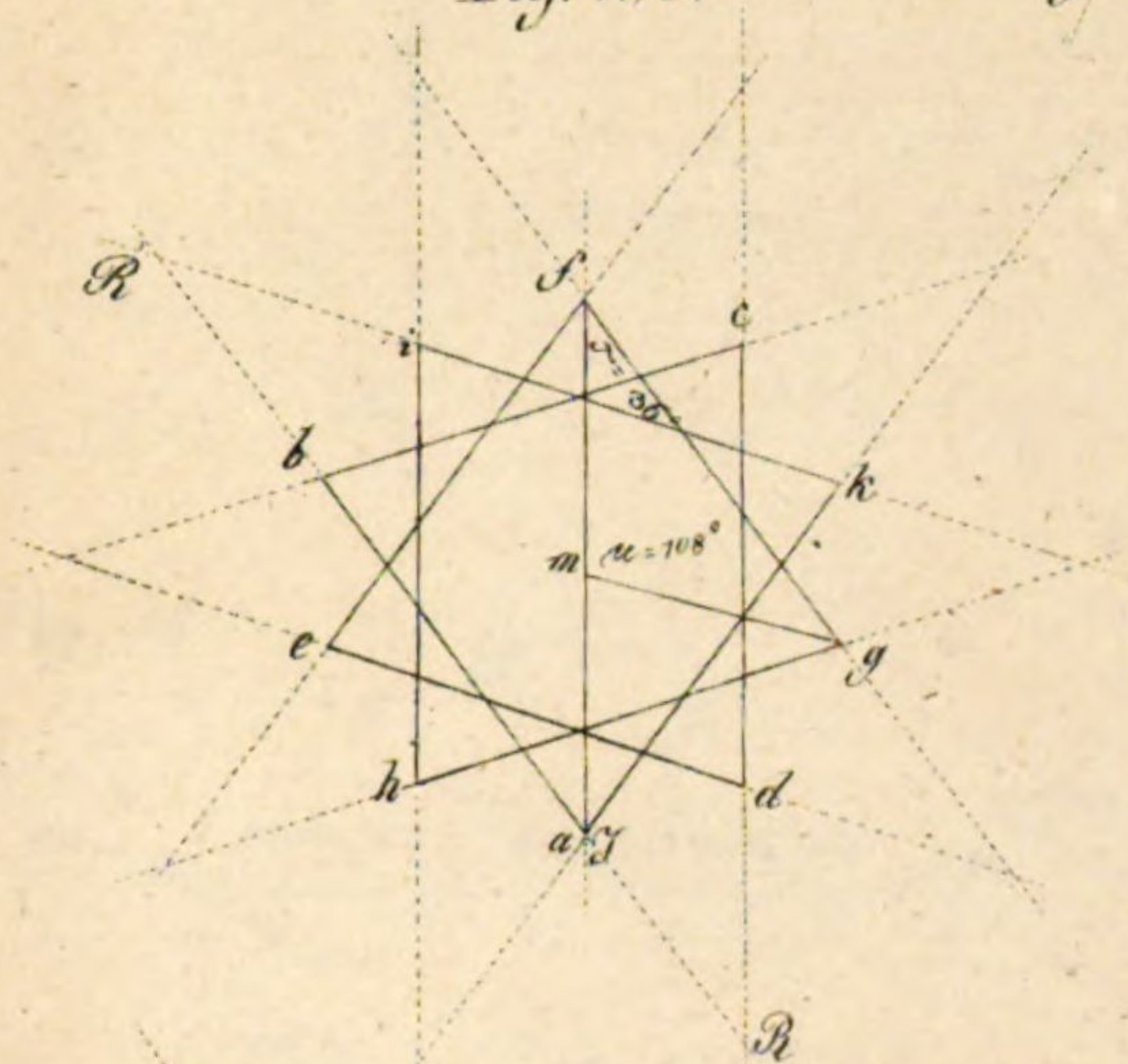


Fig. 11. c.

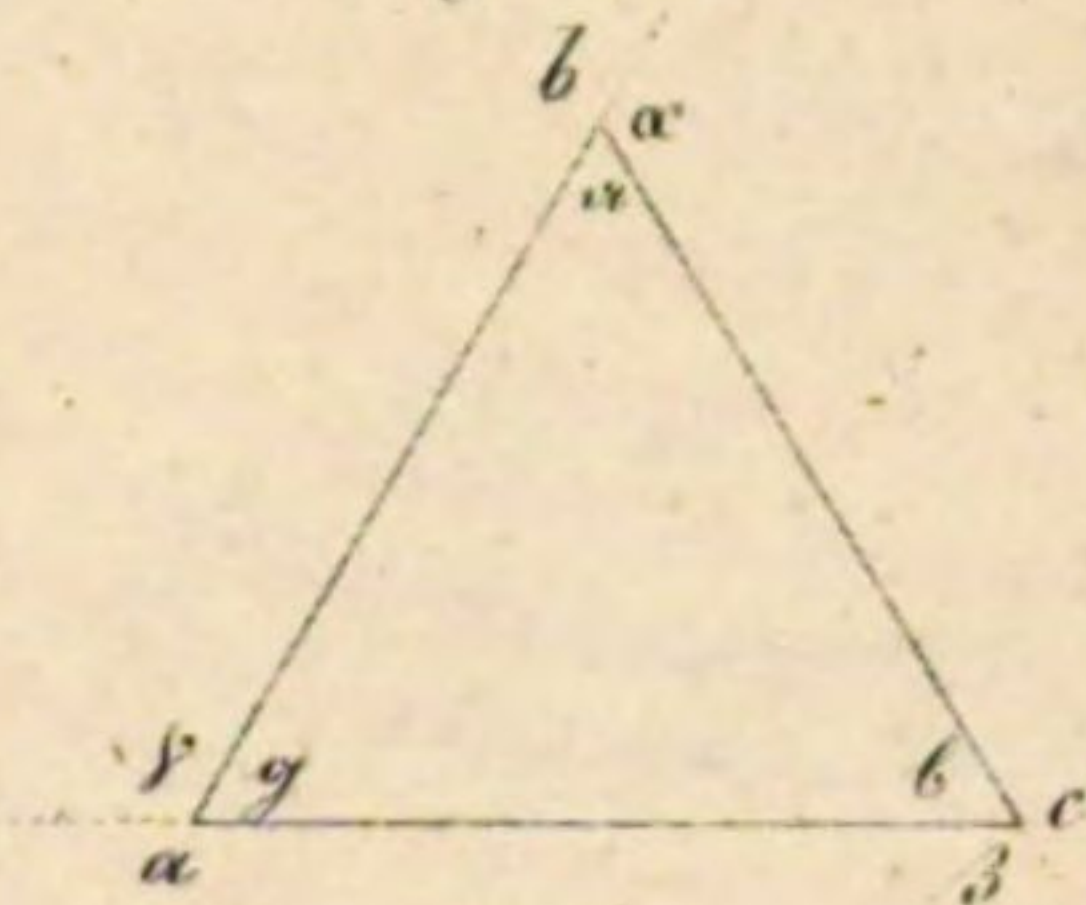


Fig. 12

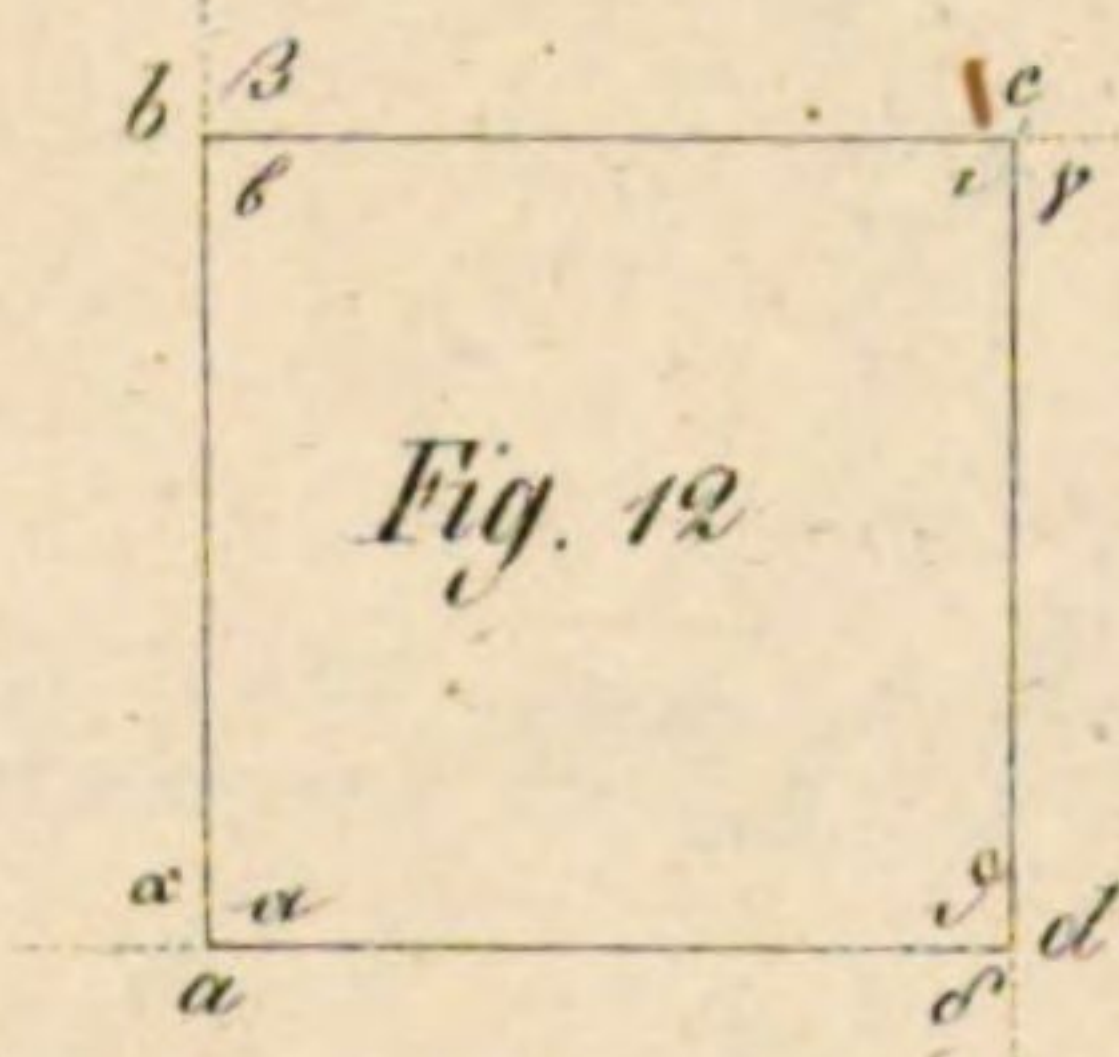


Fig. 13. a.

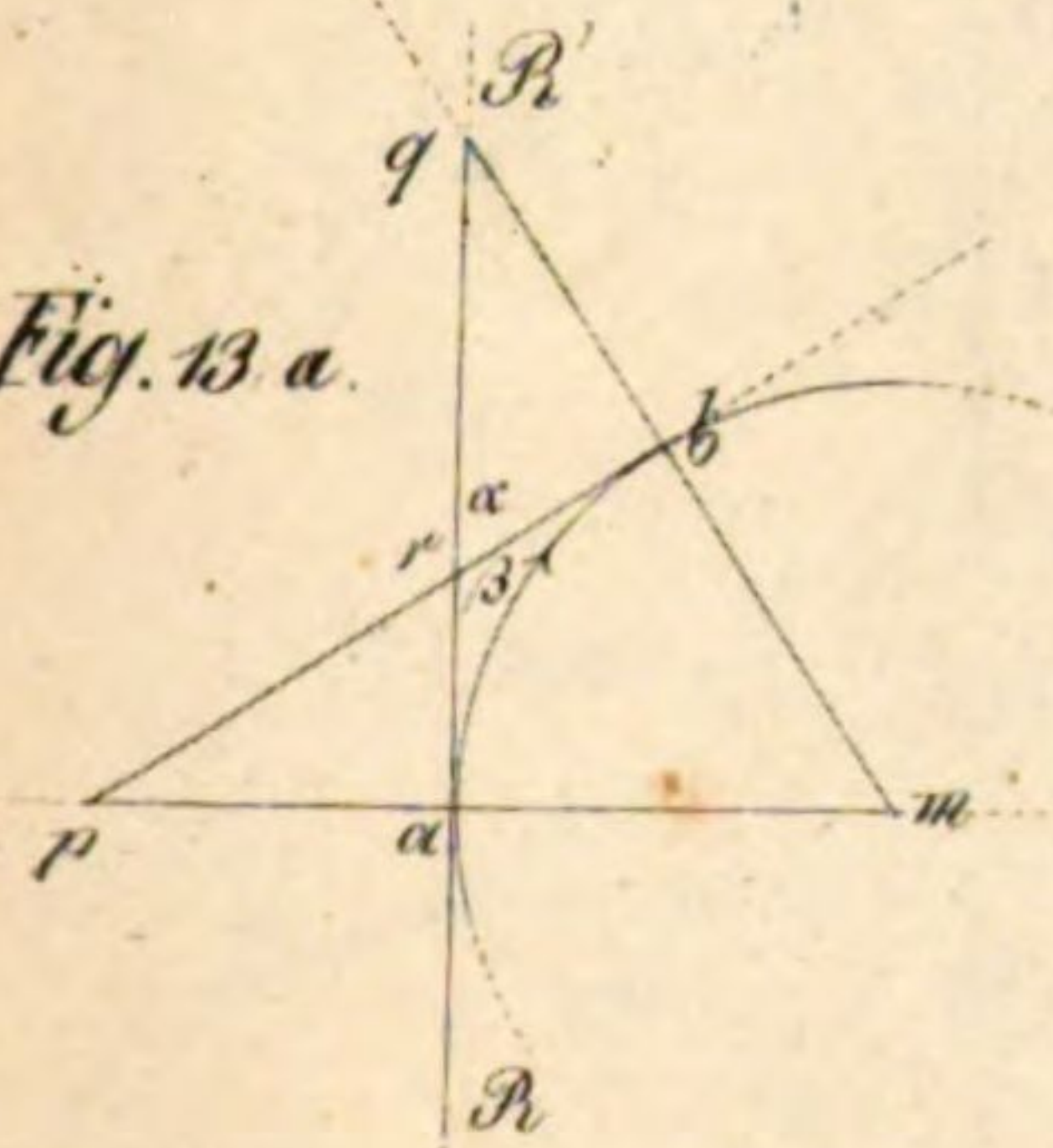


Fig. 13. b.



Fig. 13. c.

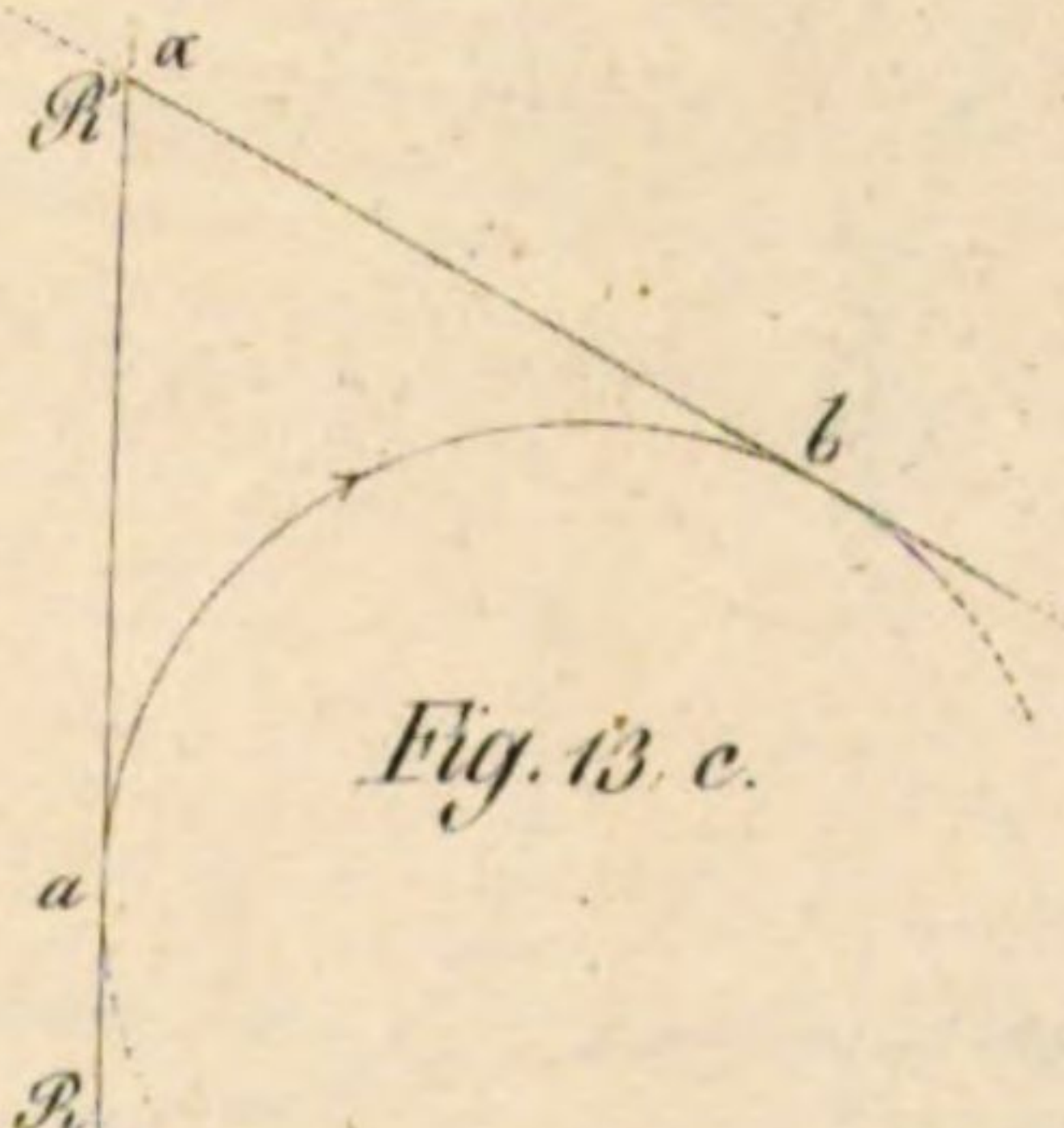


Fig. 13. d.

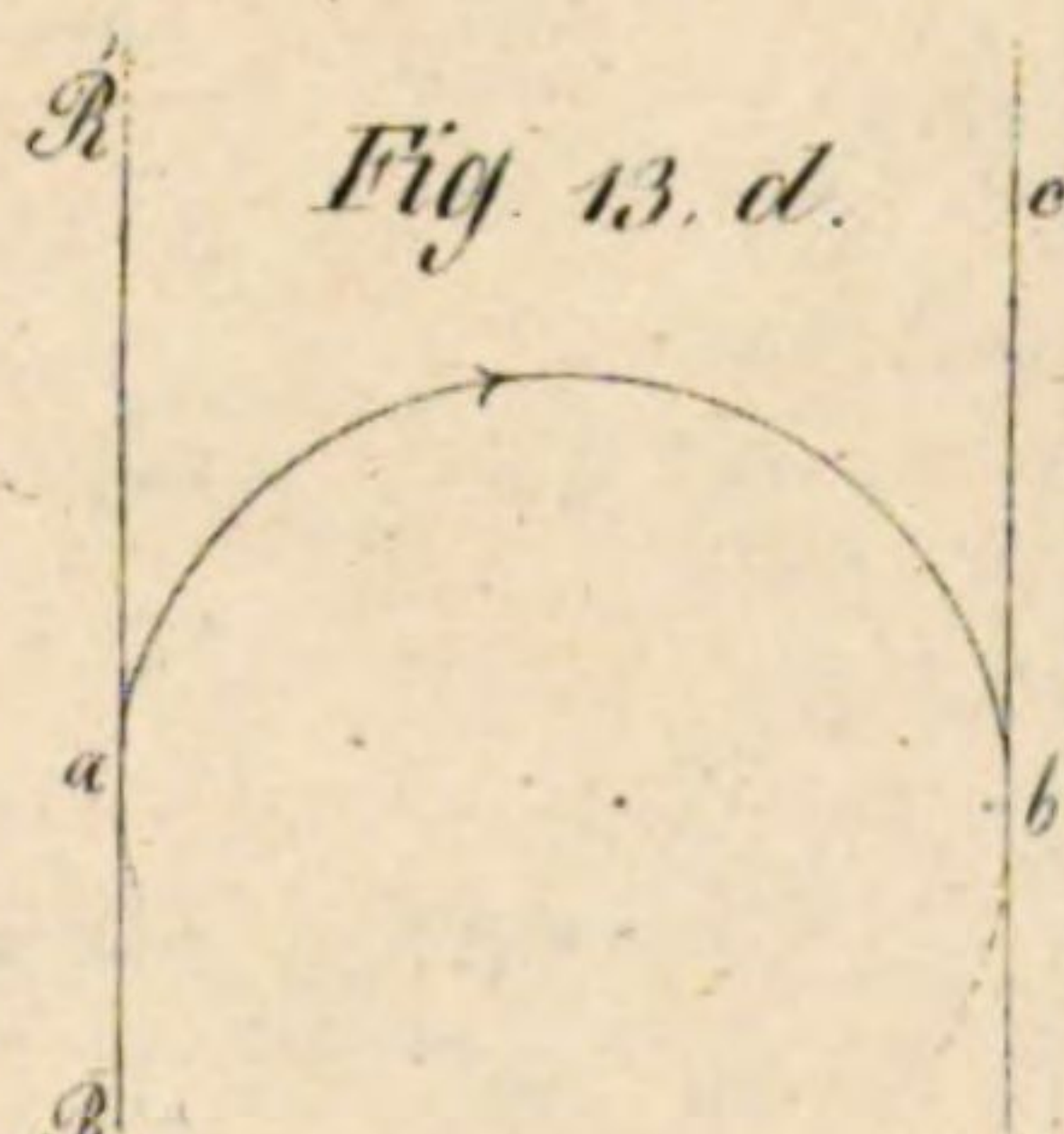


Fig. 13. e.

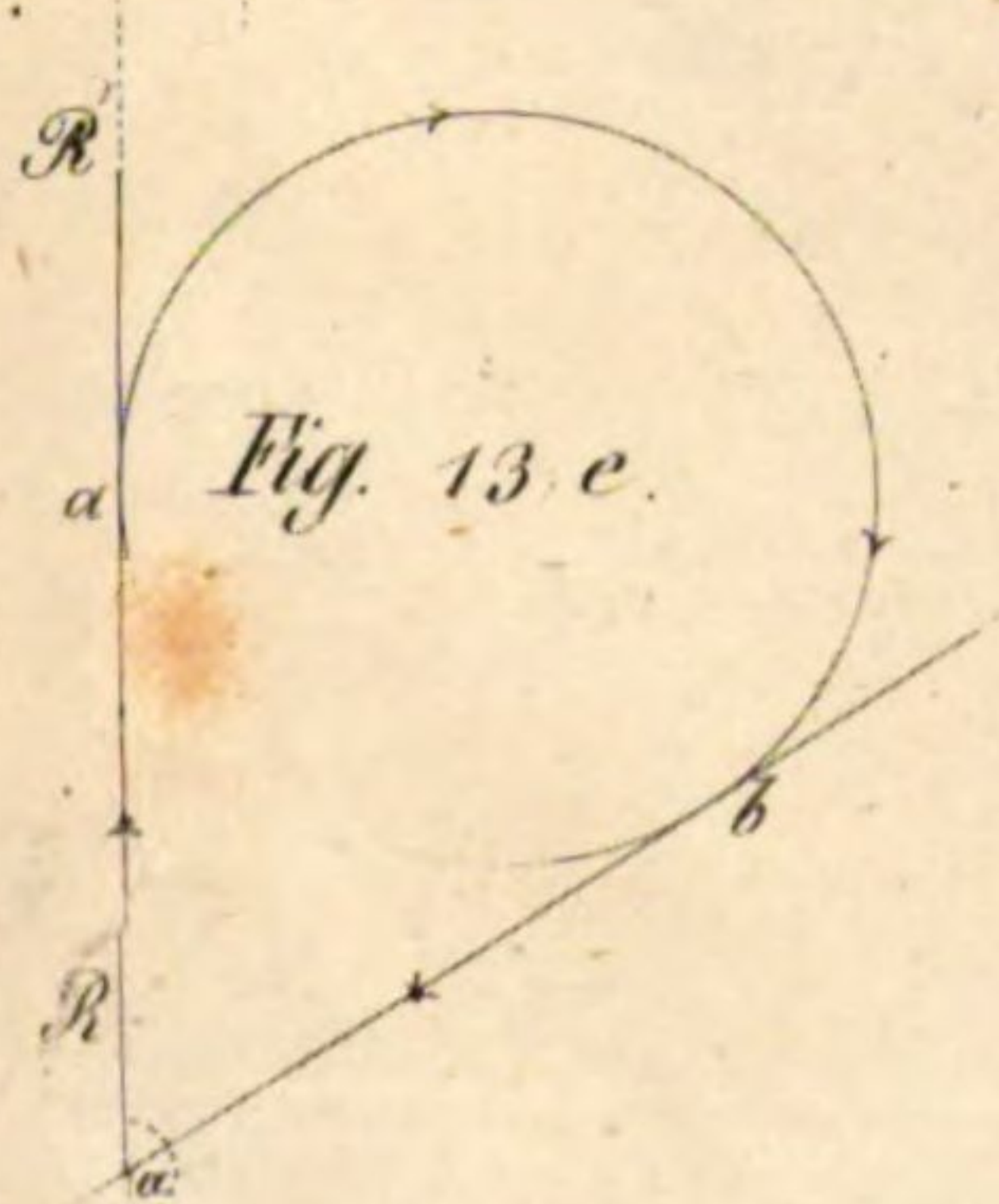


Fig. 13. f.

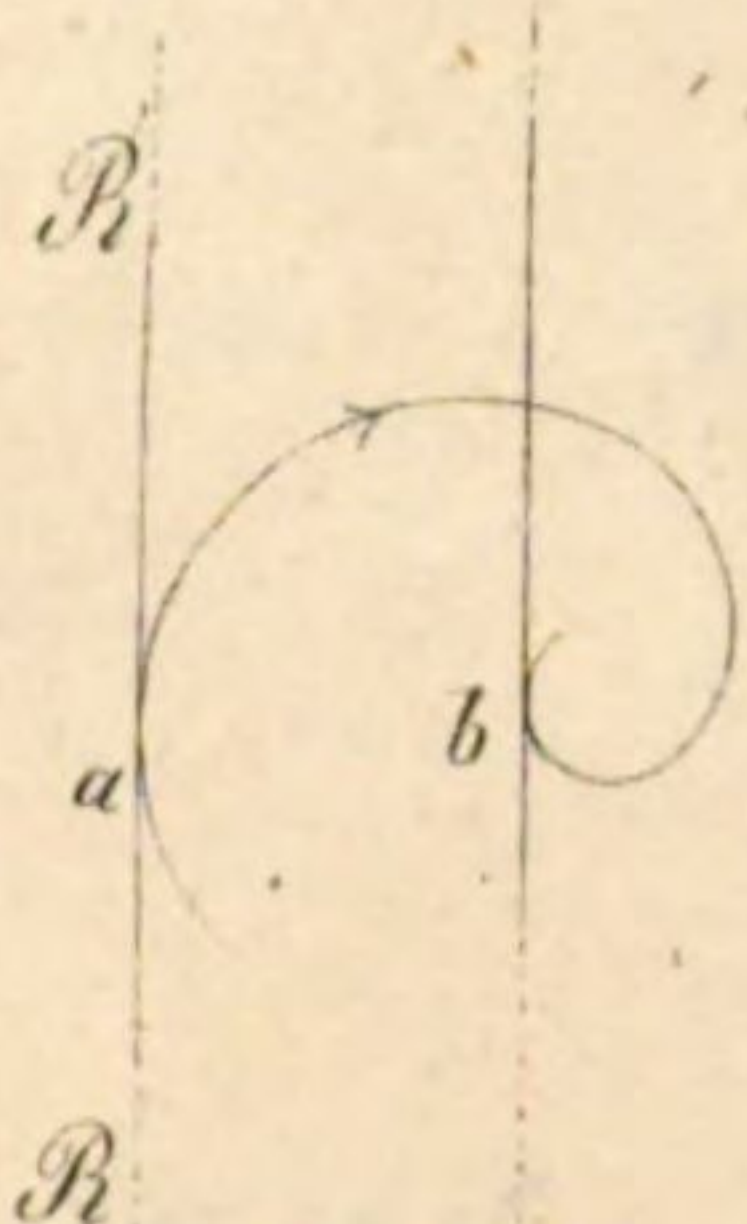


Fig. 13. g.

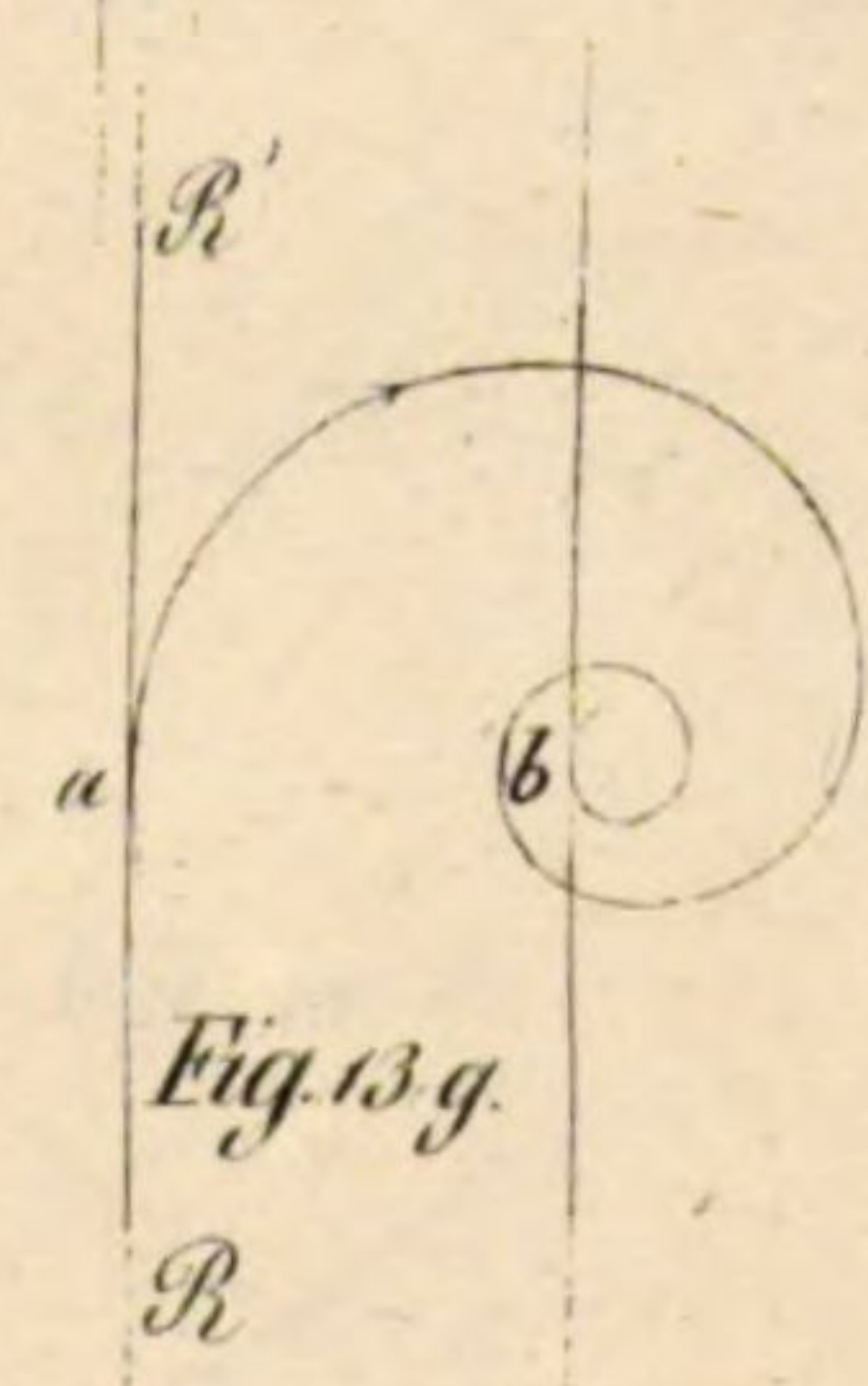


Fig. 13. h.

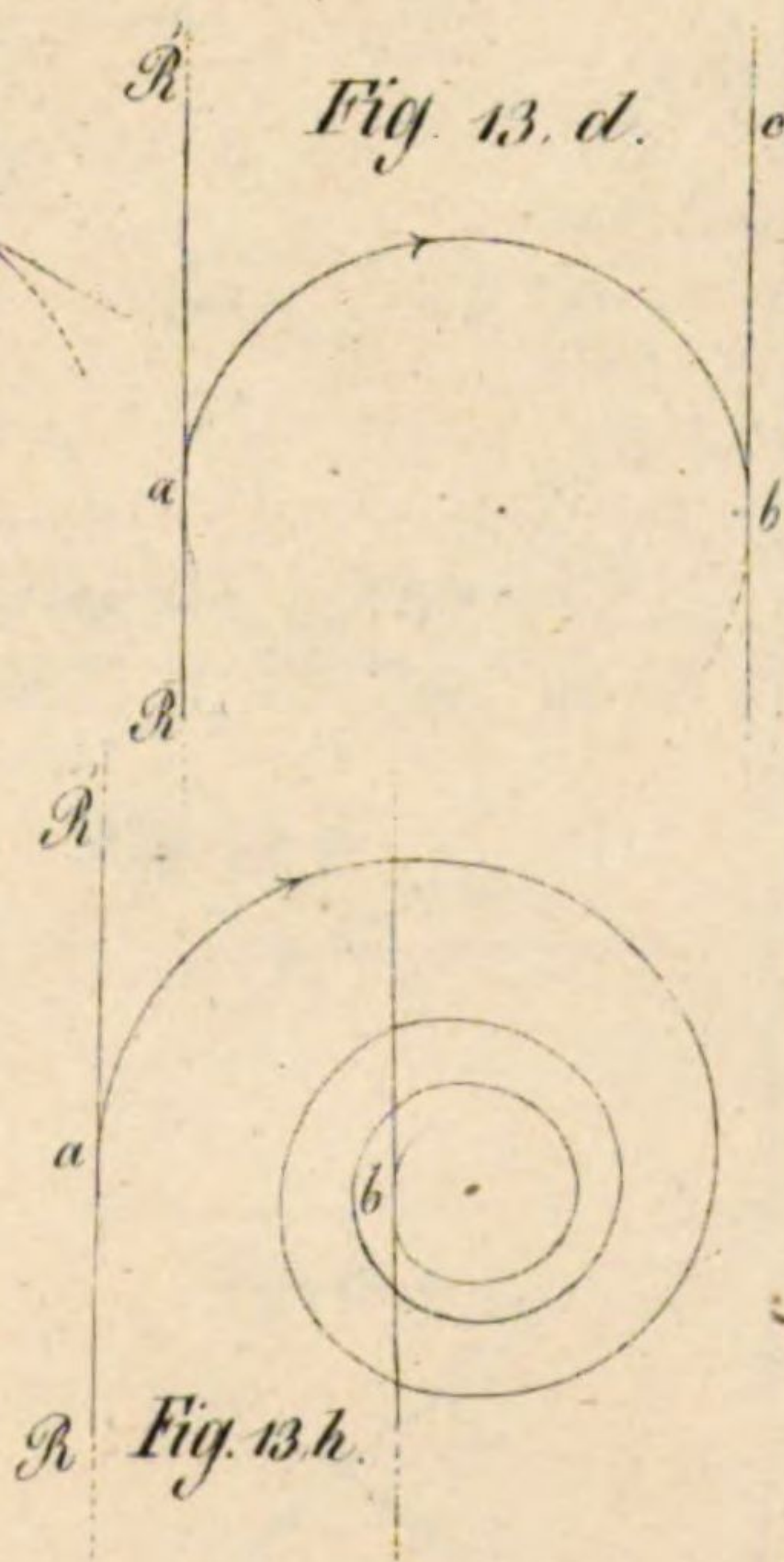


Fig. 14.

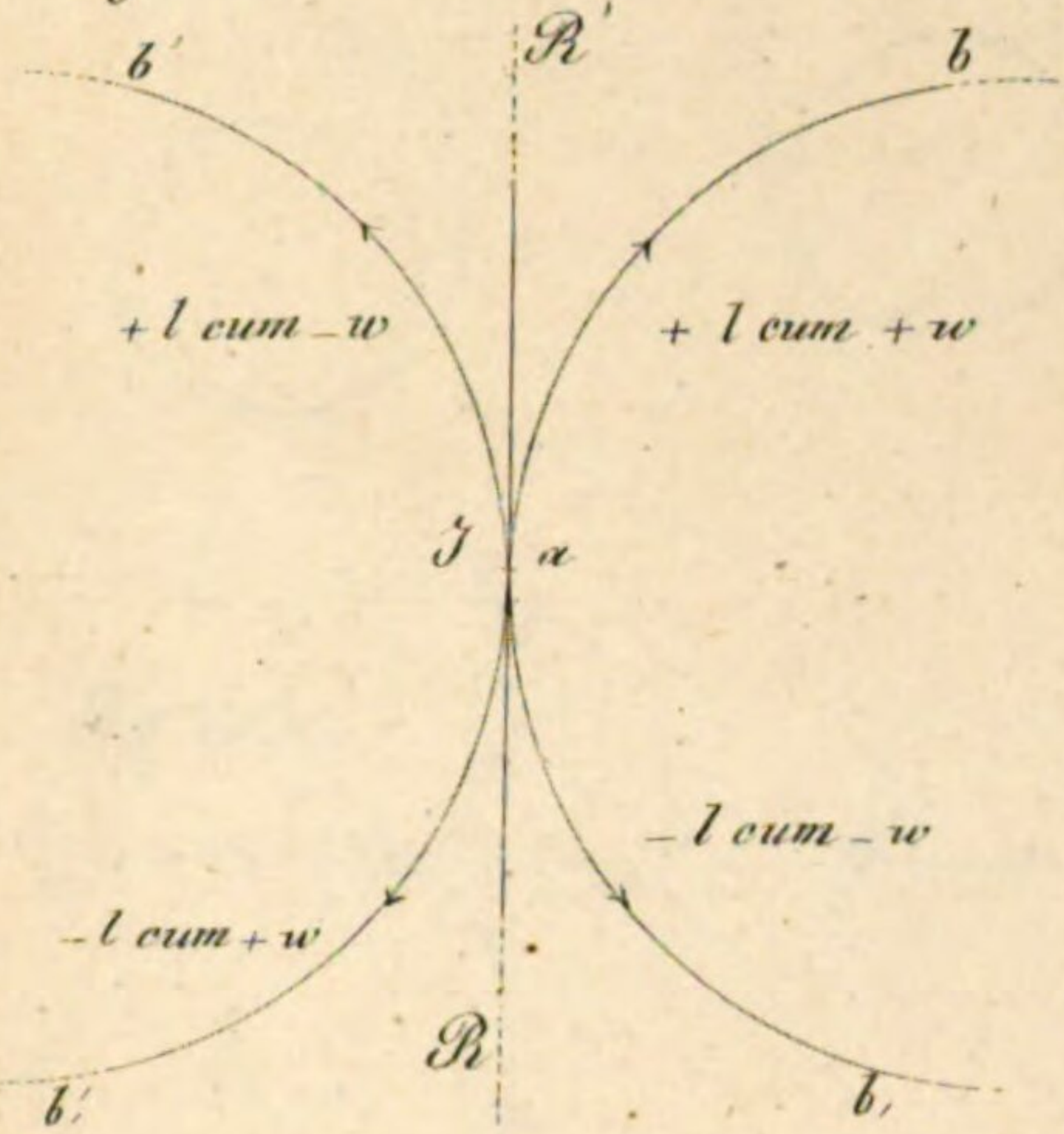


Fig. 15.

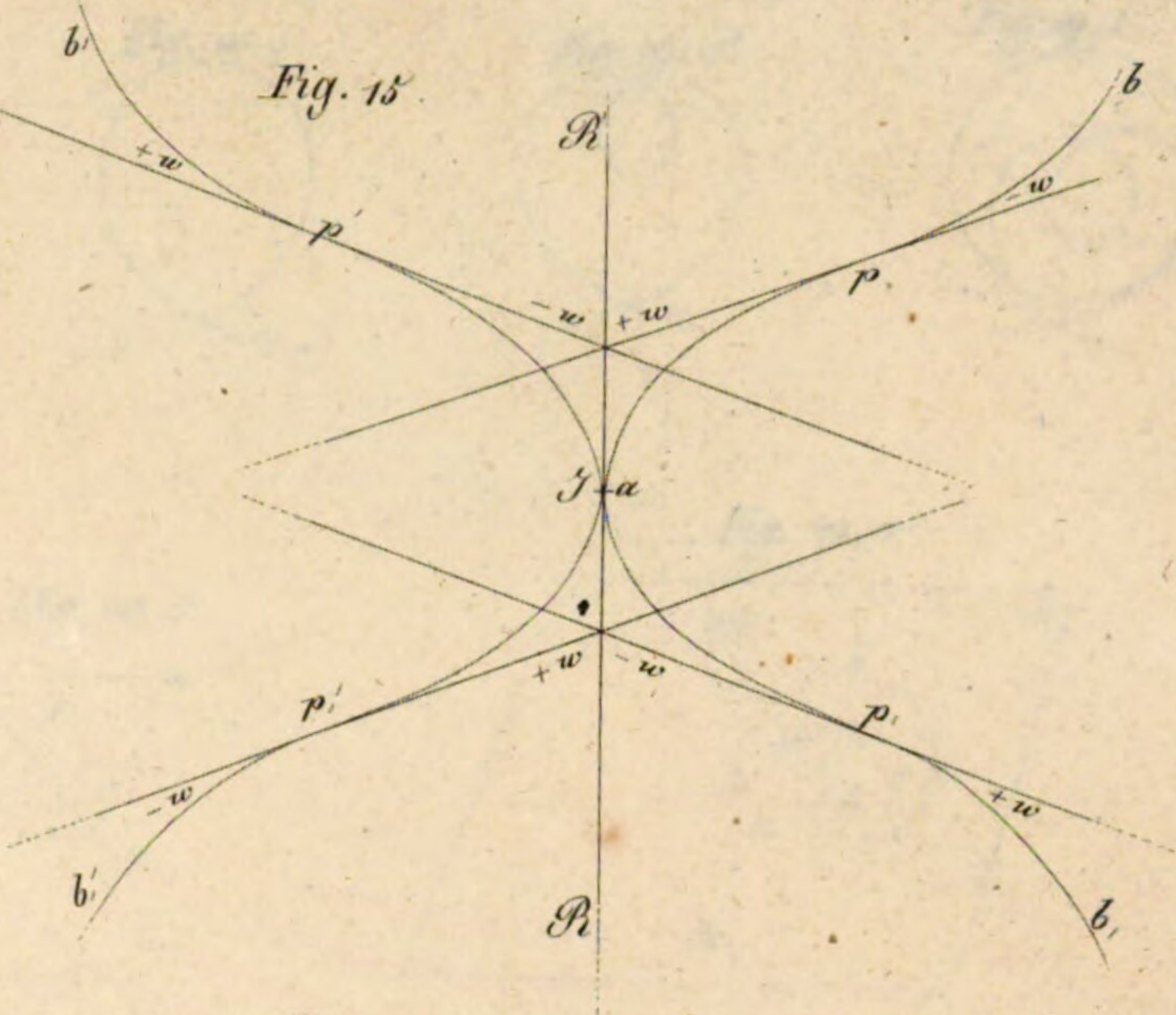


Fig. 16.

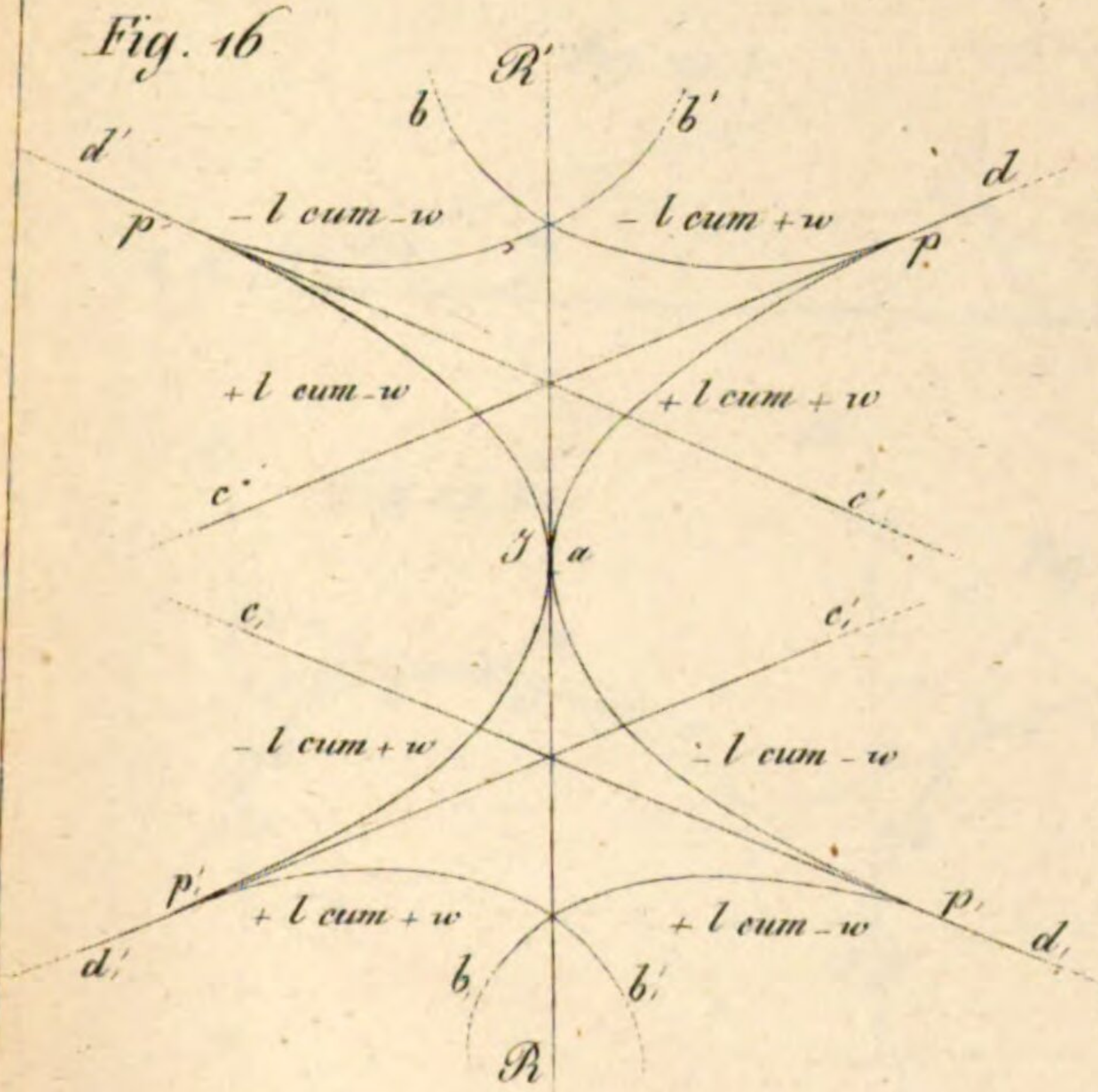


Fig. 17.

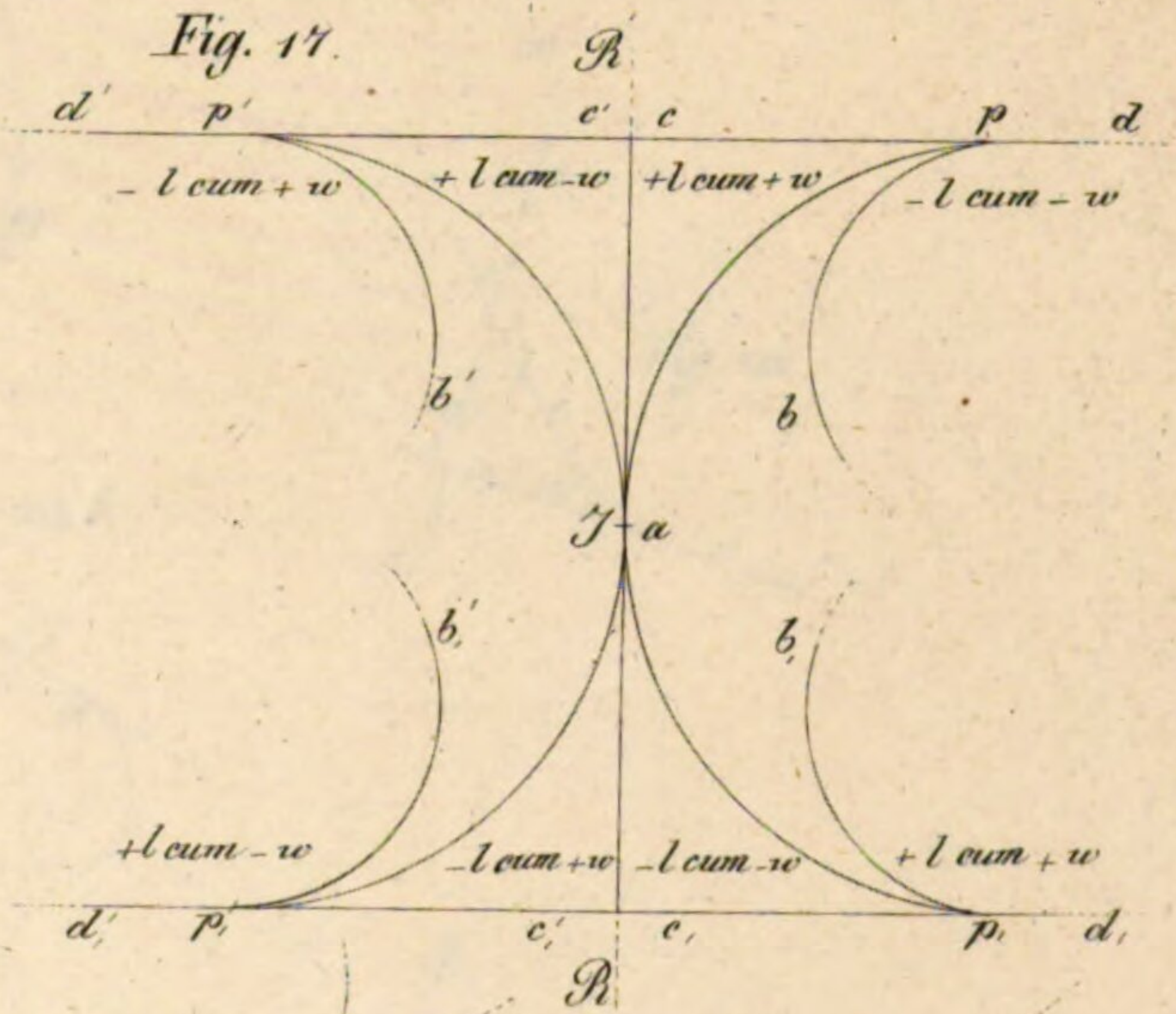


Fig. 18, α .

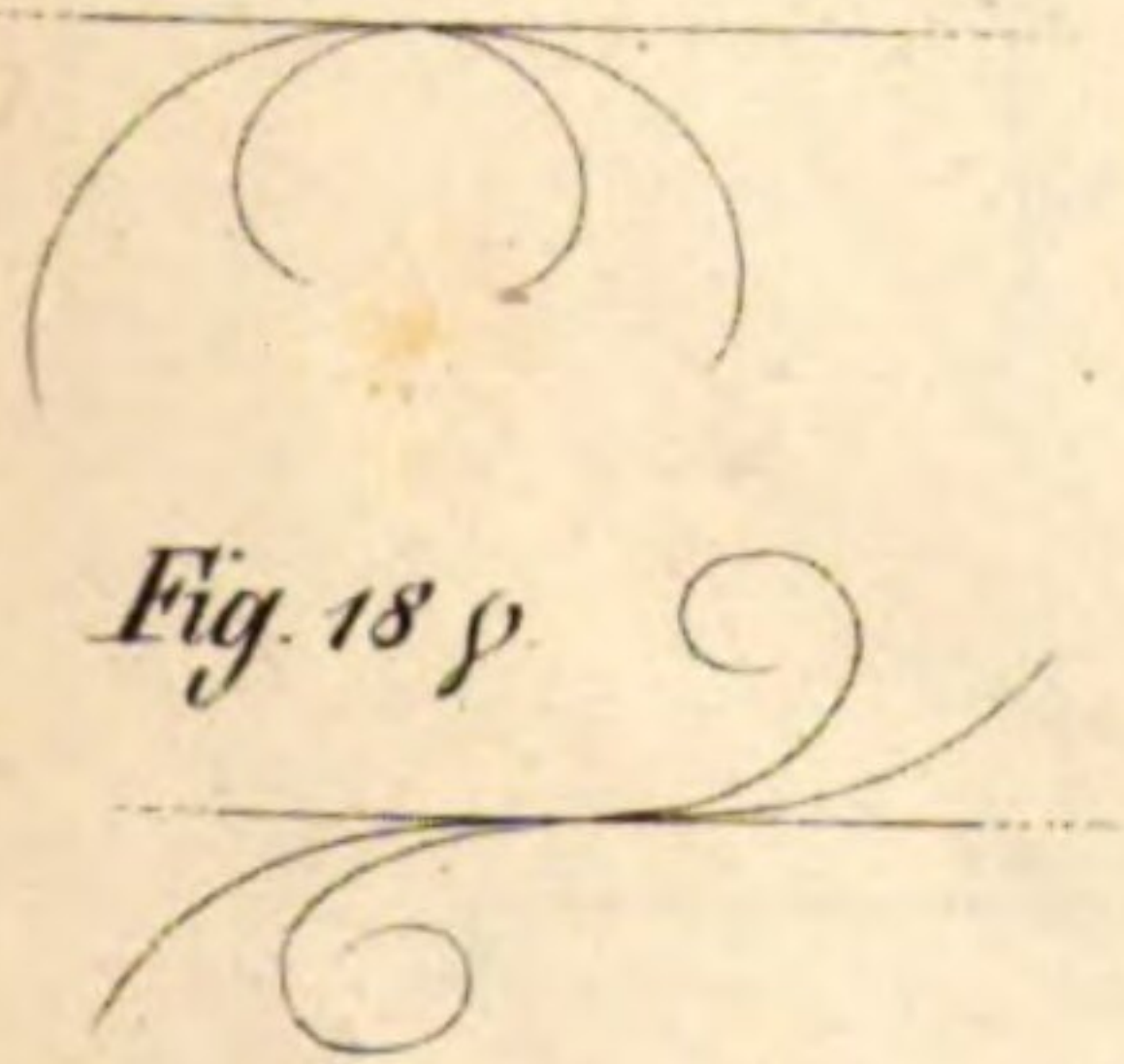


Fig. 18, β .

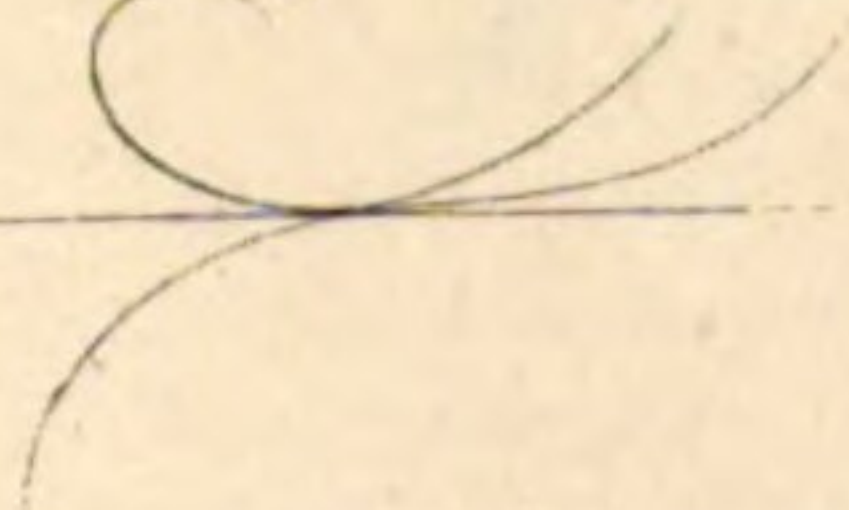


Fig. 18, ϵ .

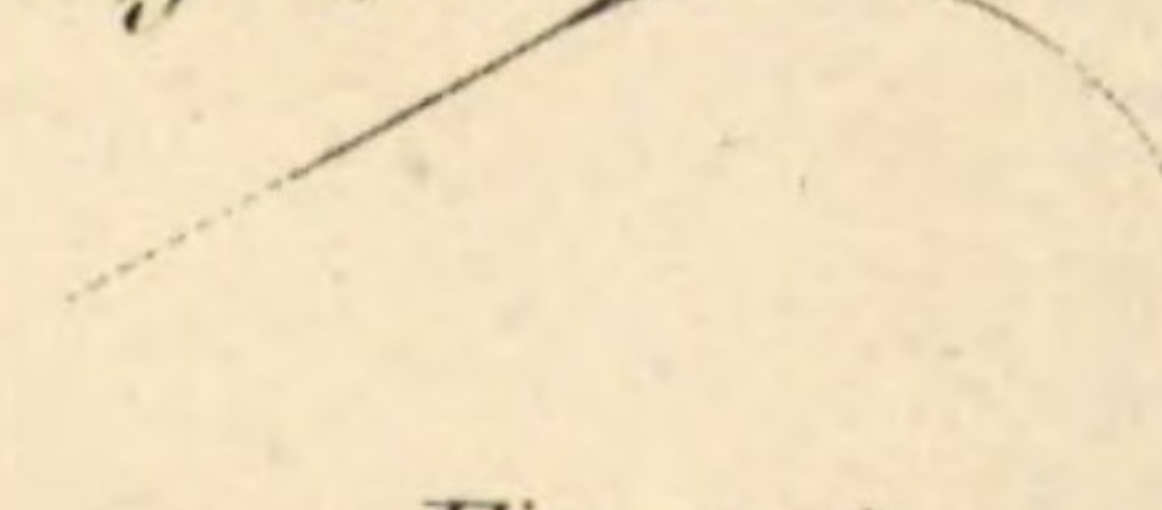


Fig. 18, ζ .



Fig. 18, δ .

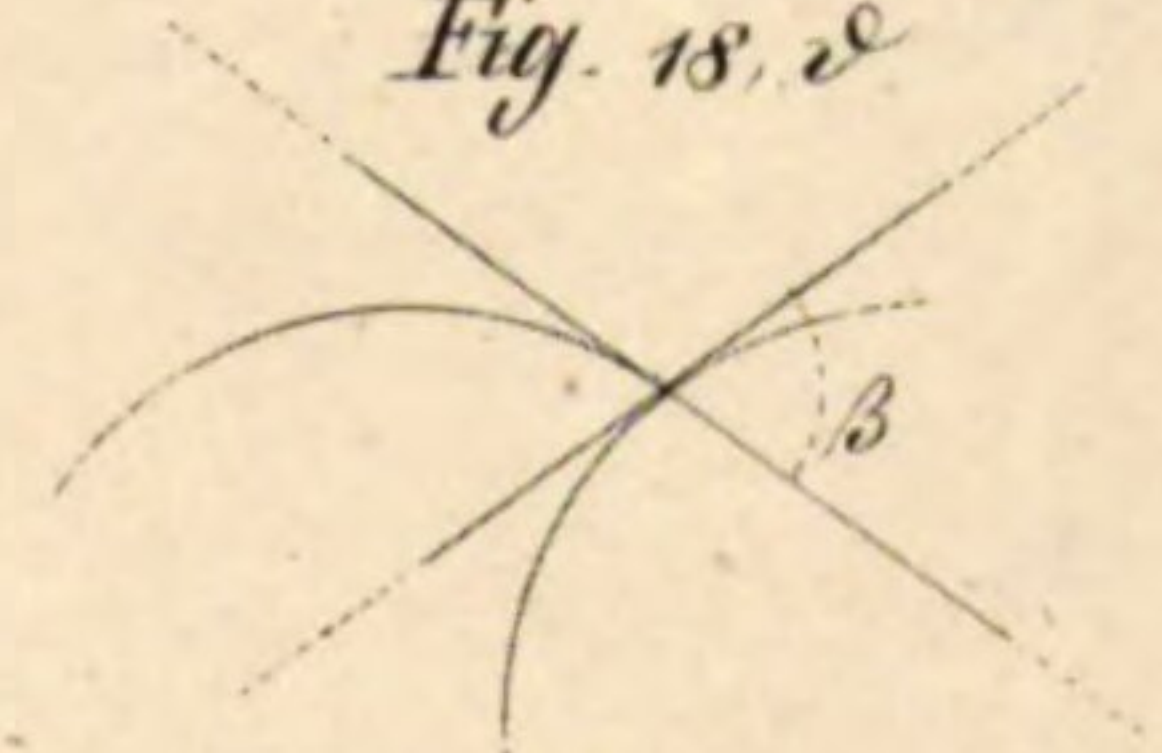


Fig. 18, η .

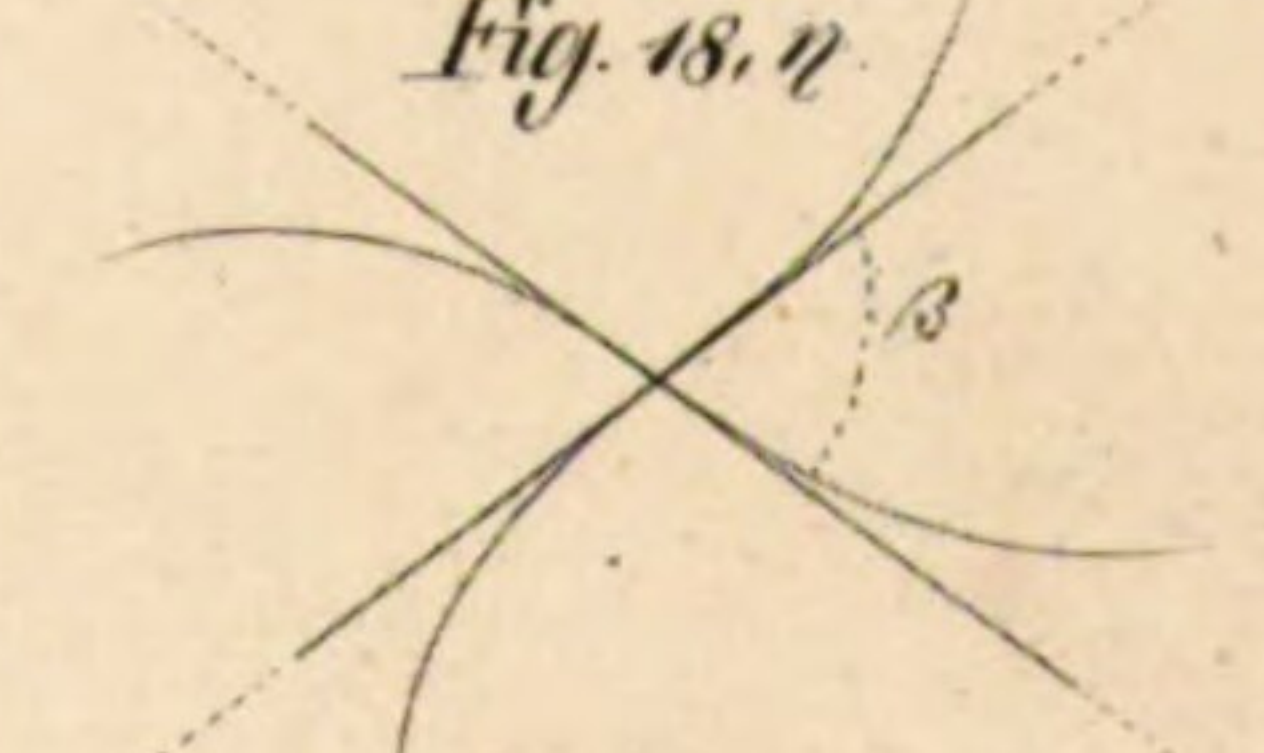


Fig. 18, θ .

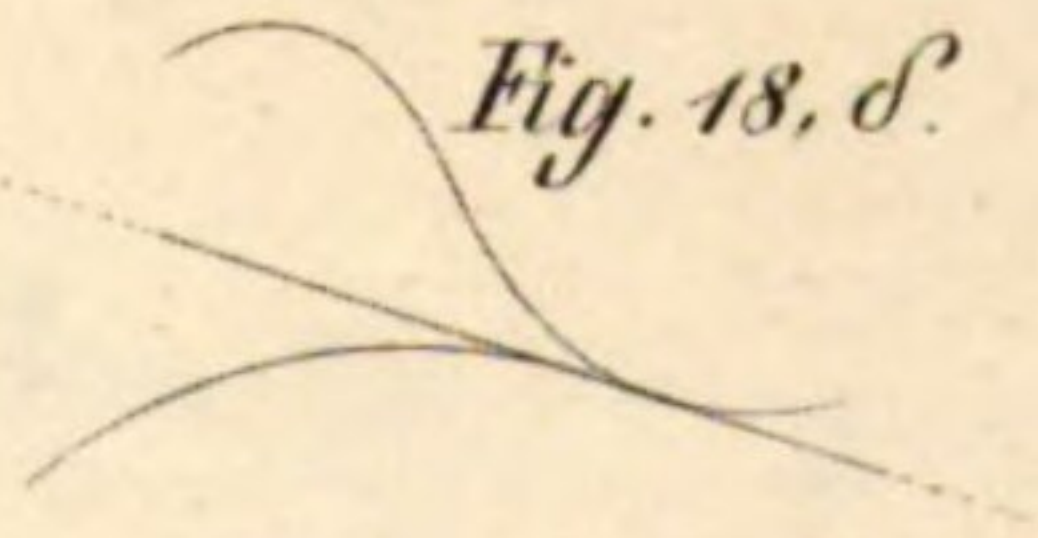


Fig. 19, α .



Fig. 19, β .

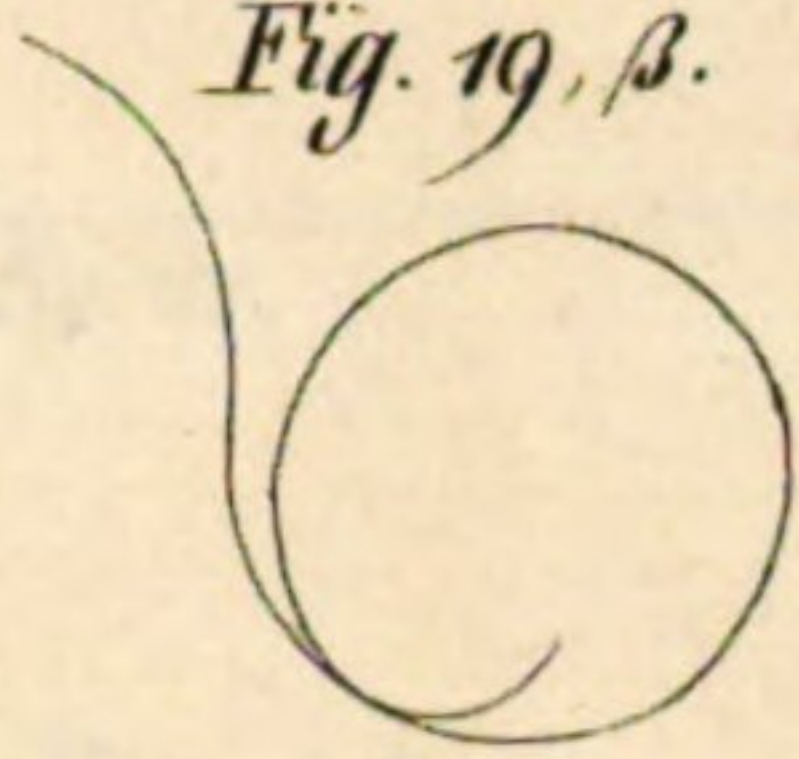


Fig. 19, γ .

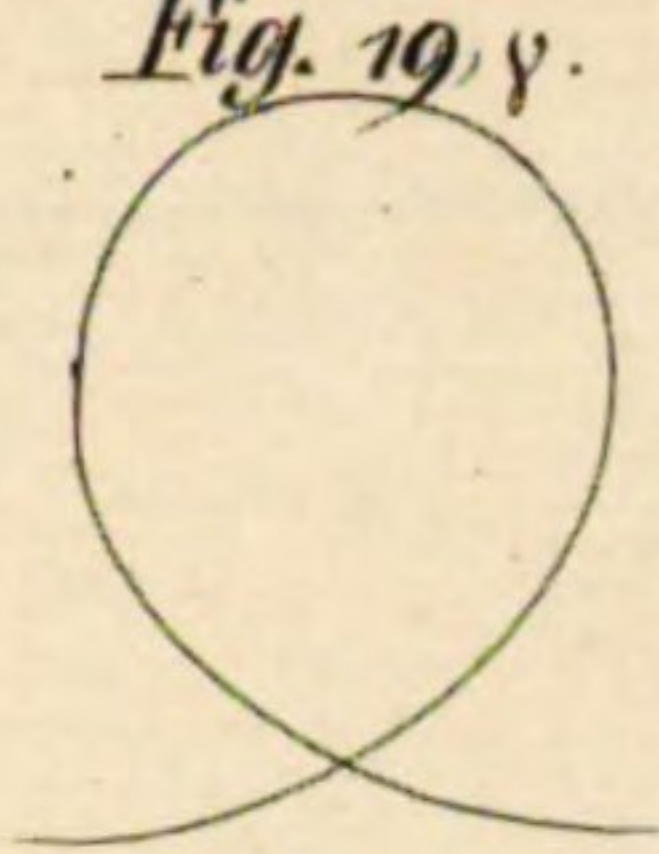


Fig. 19, δ .

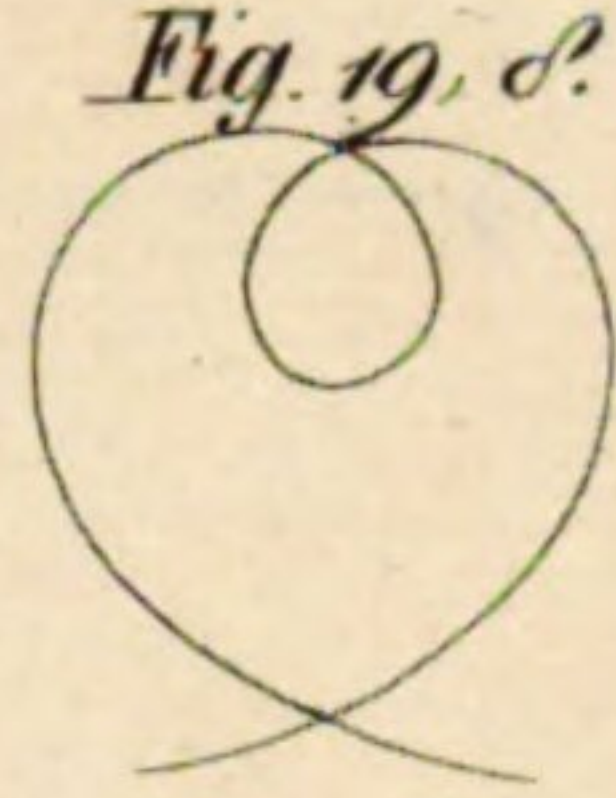


Fig. 19, ϵ .

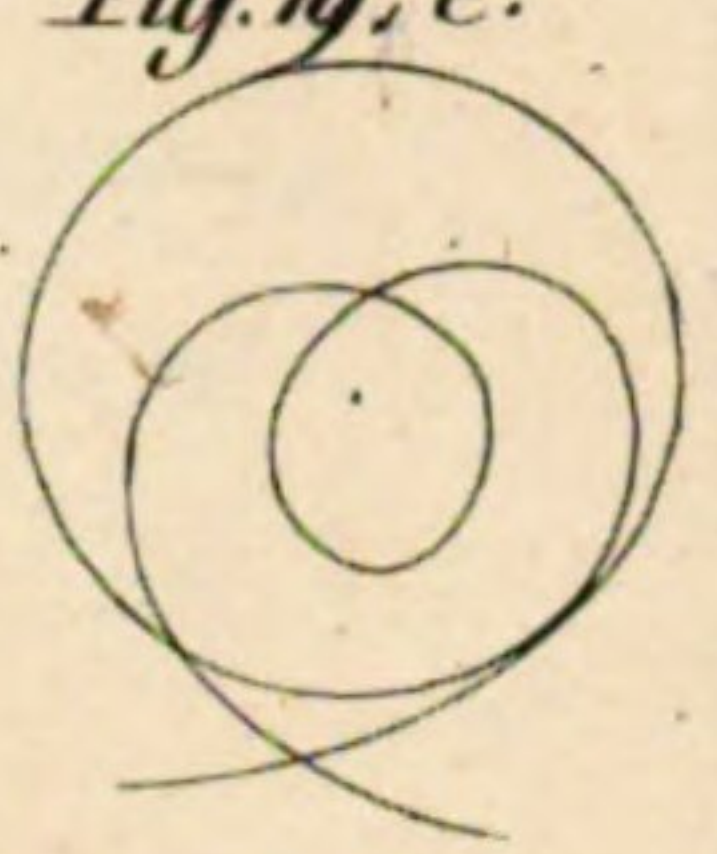


Fig. 20, α .

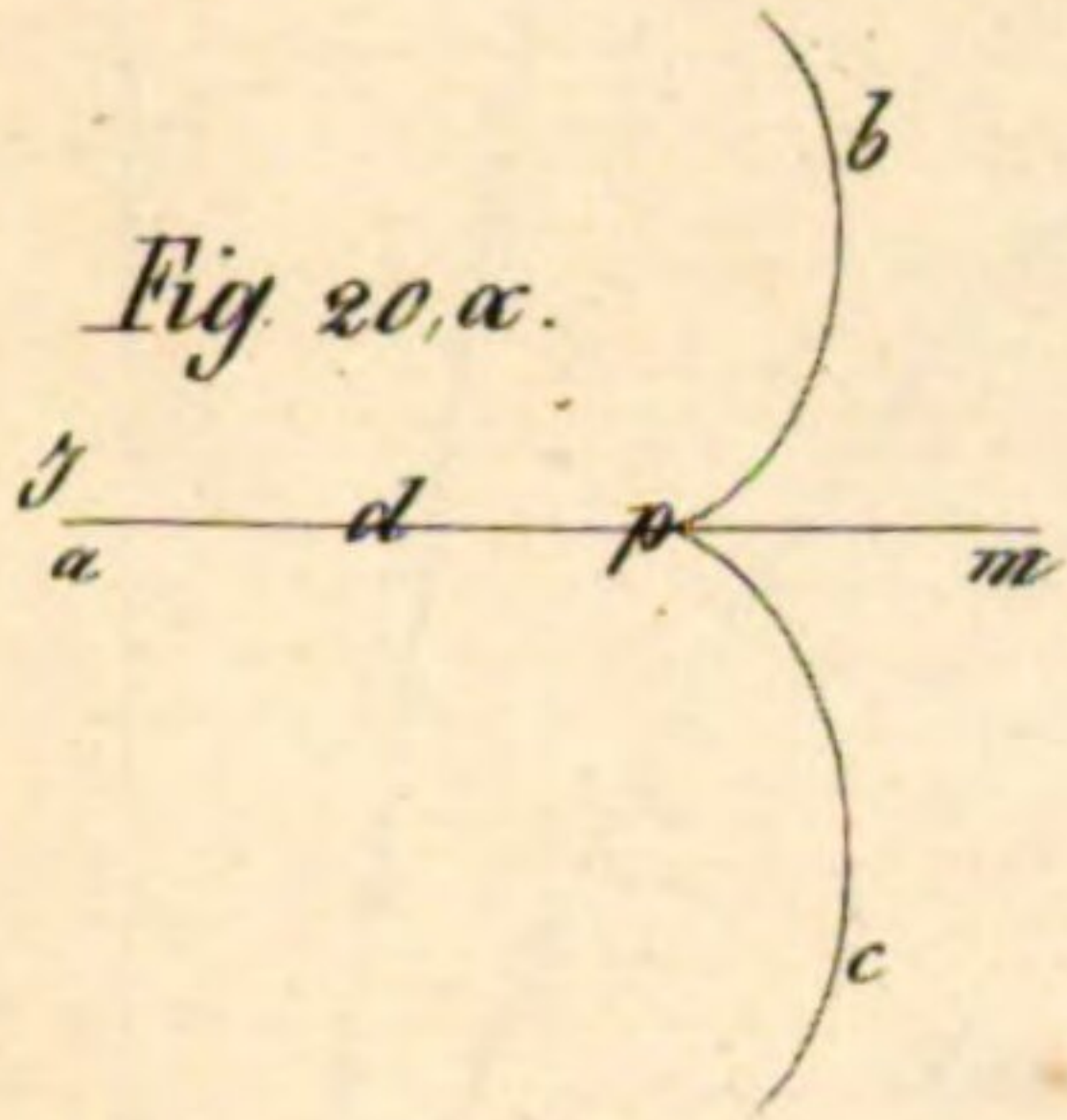


Fig. 20, β .

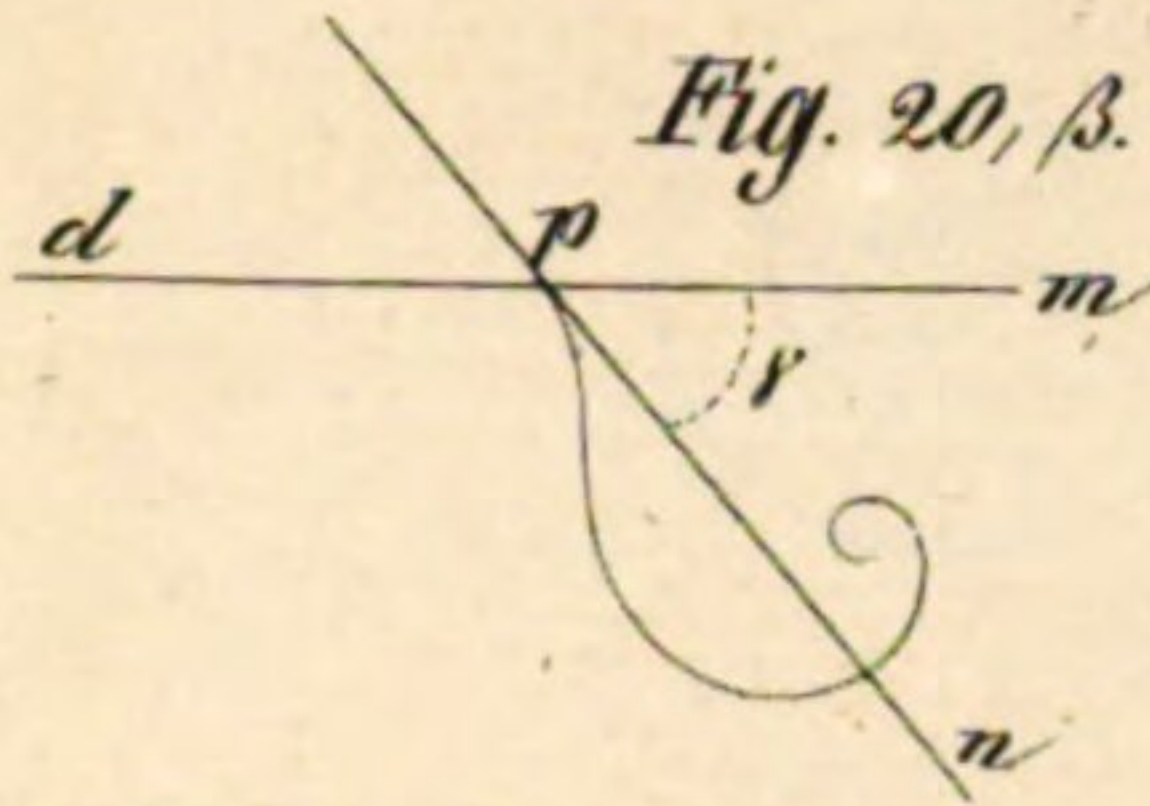


Fig. 21, a

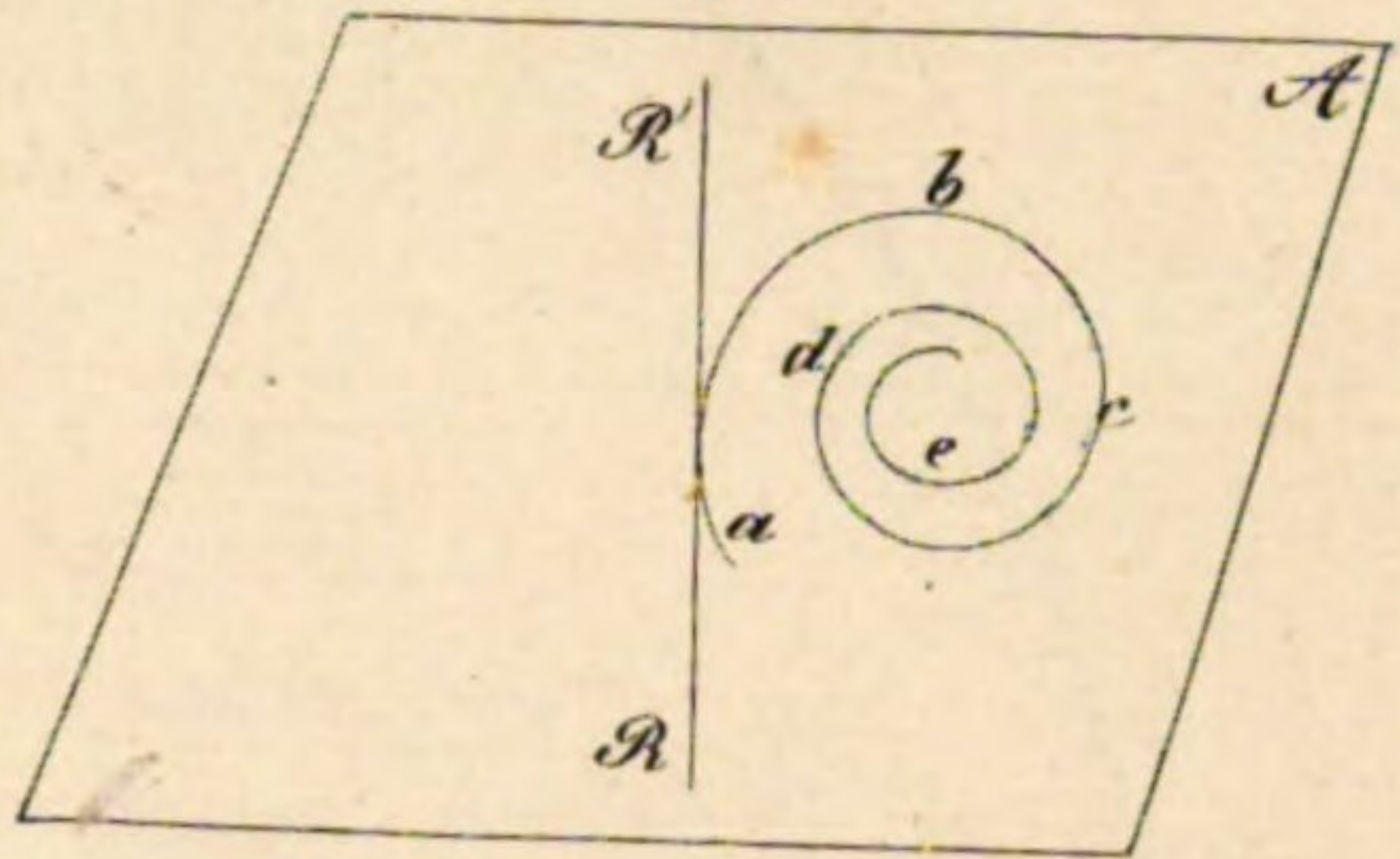


Fig. 21, b.

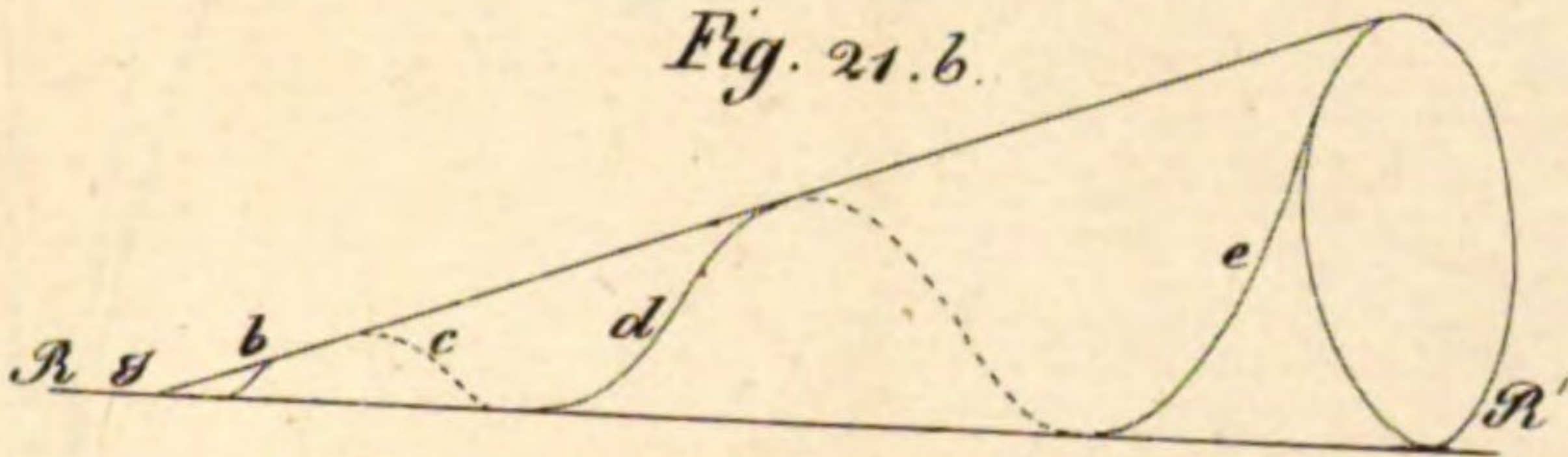


Fig. 23, a.

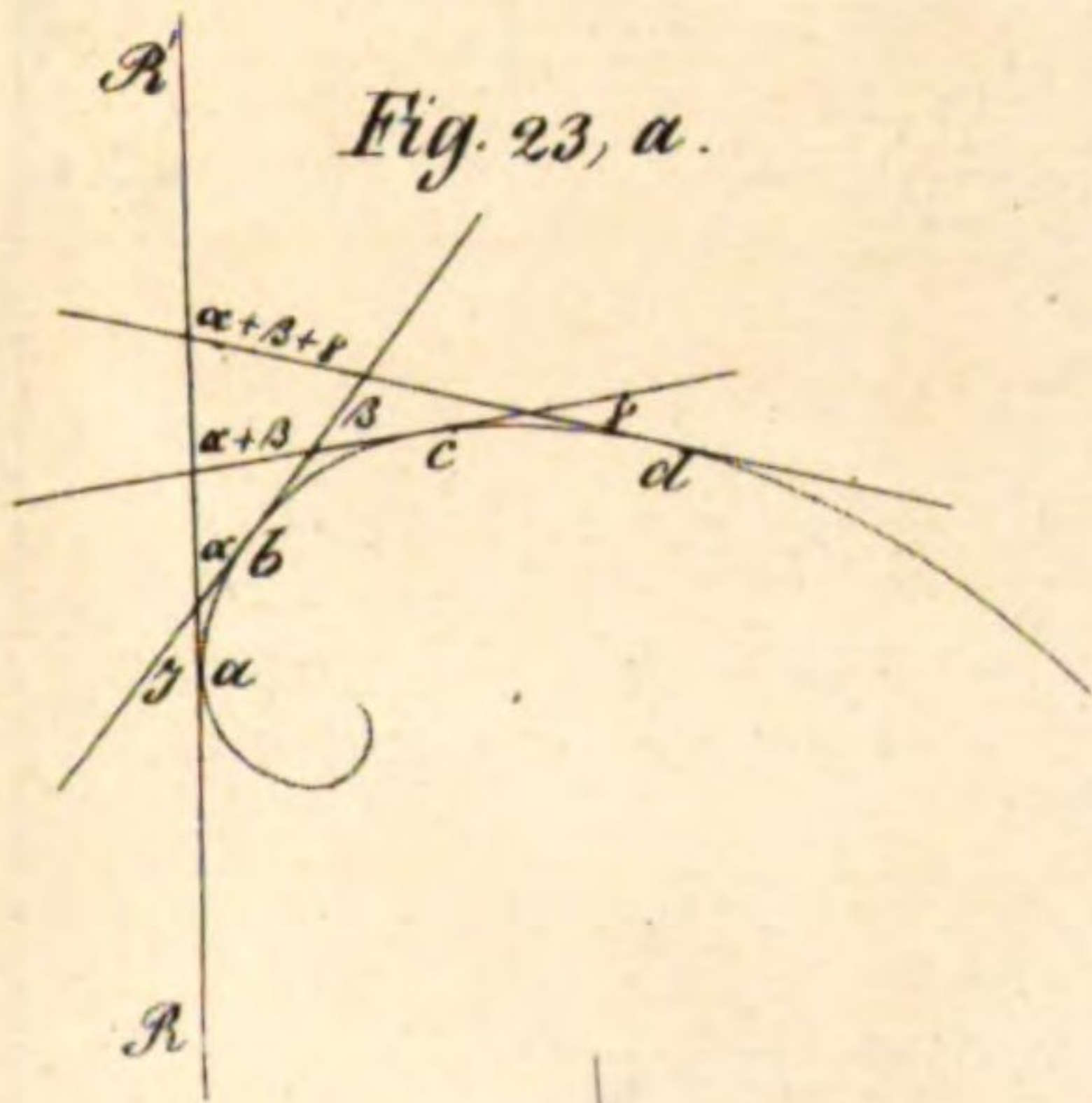


Fig. 23, b.

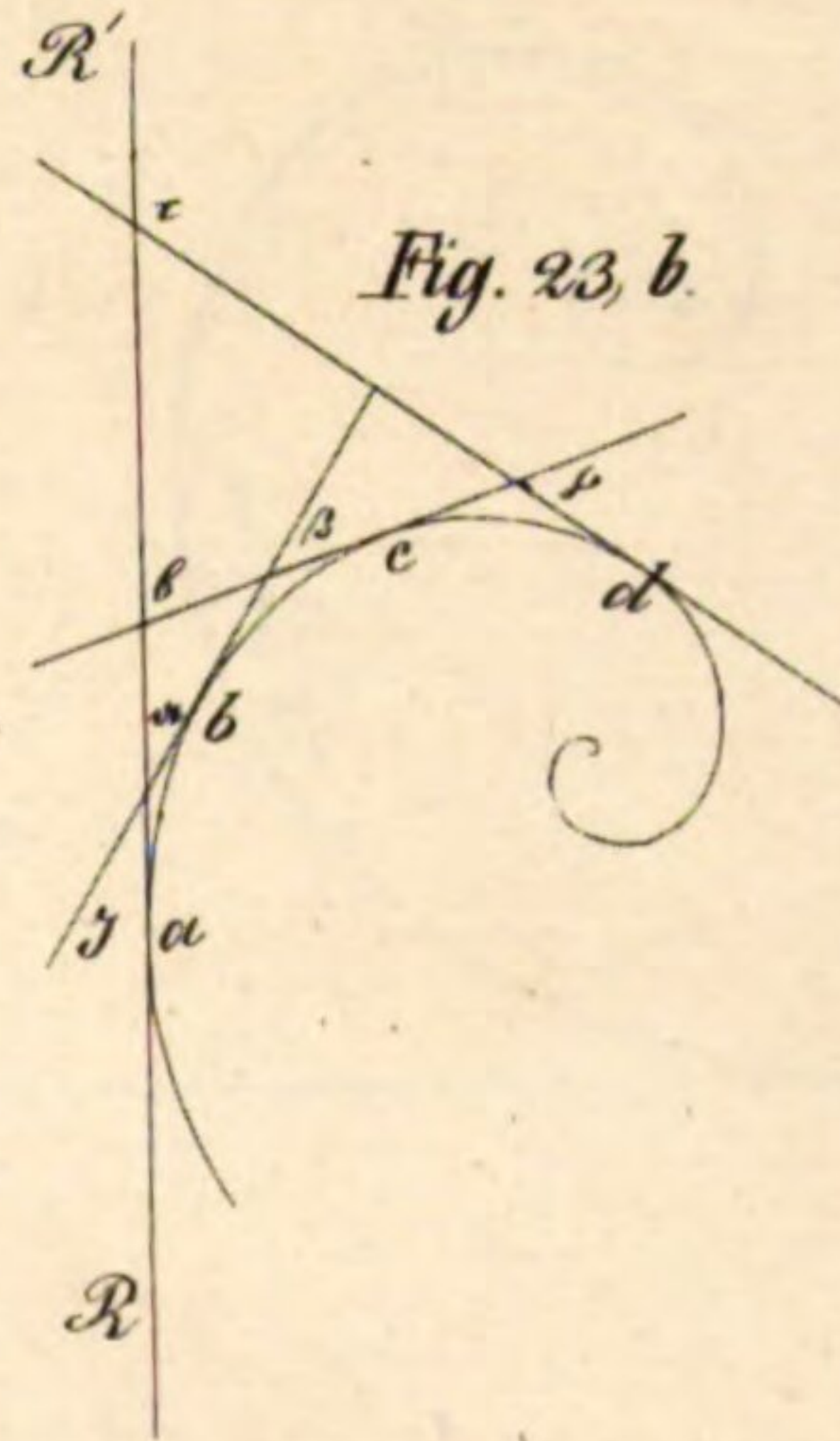


Fig. 22.

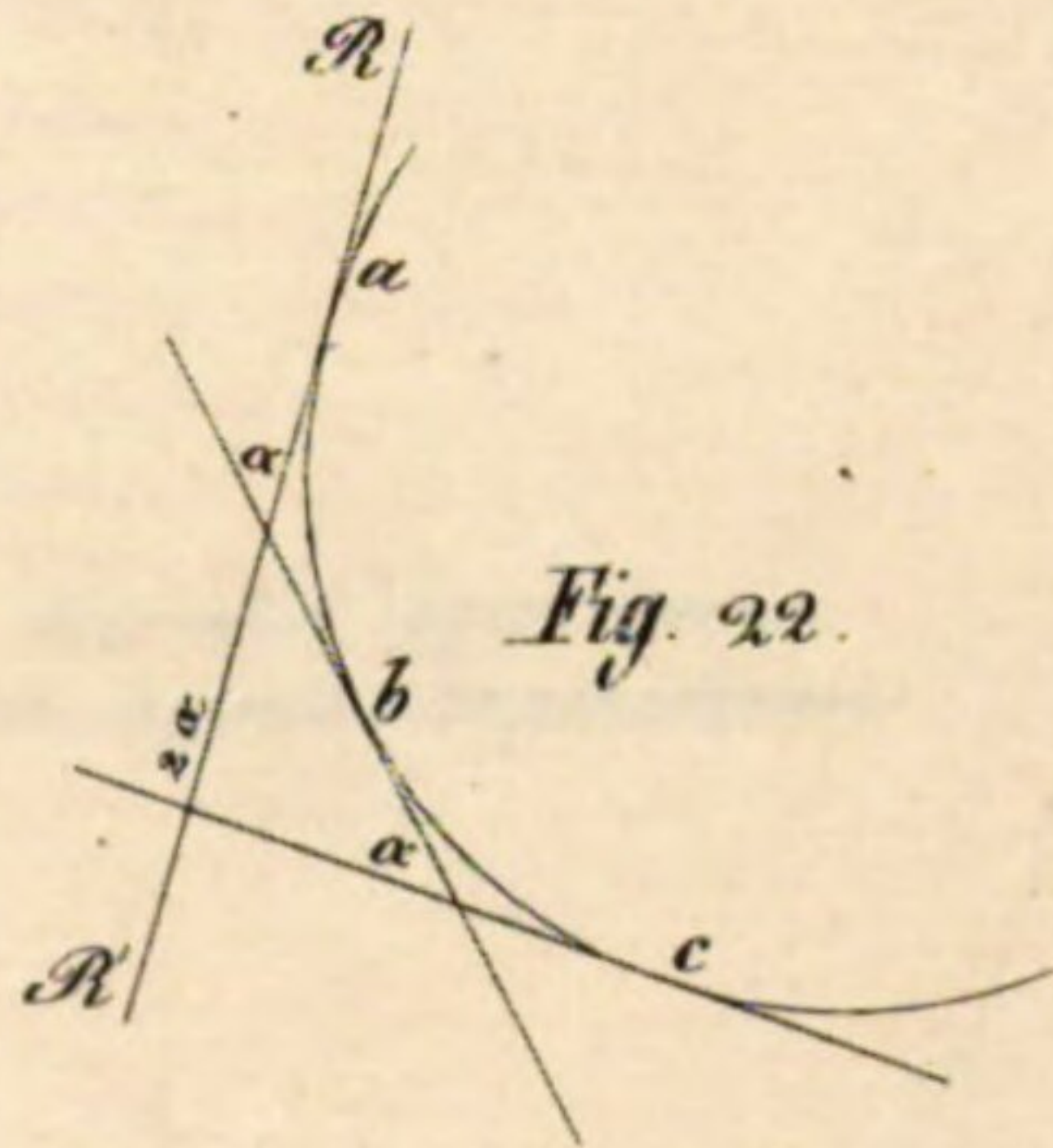


Fig. 23, c.

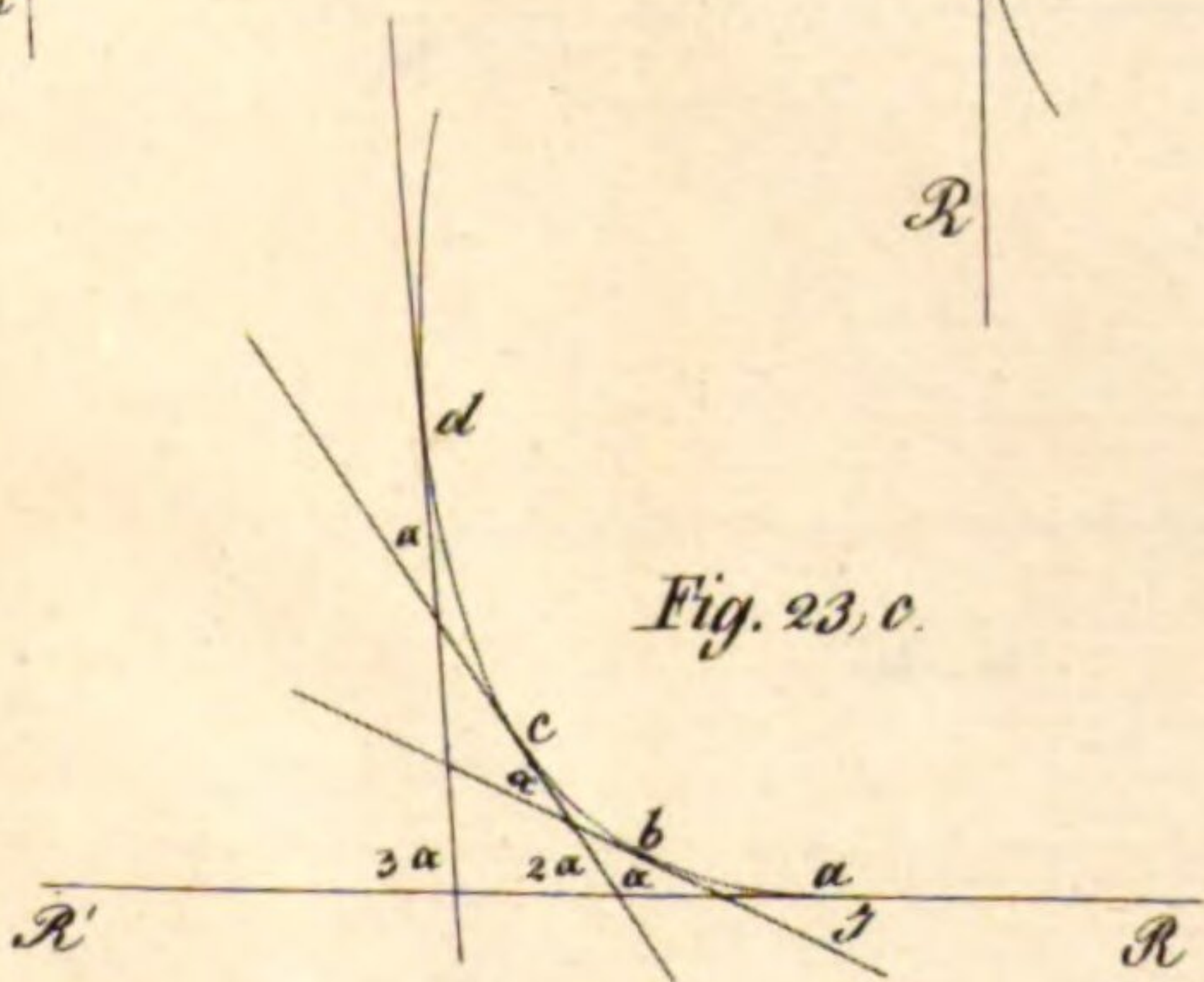
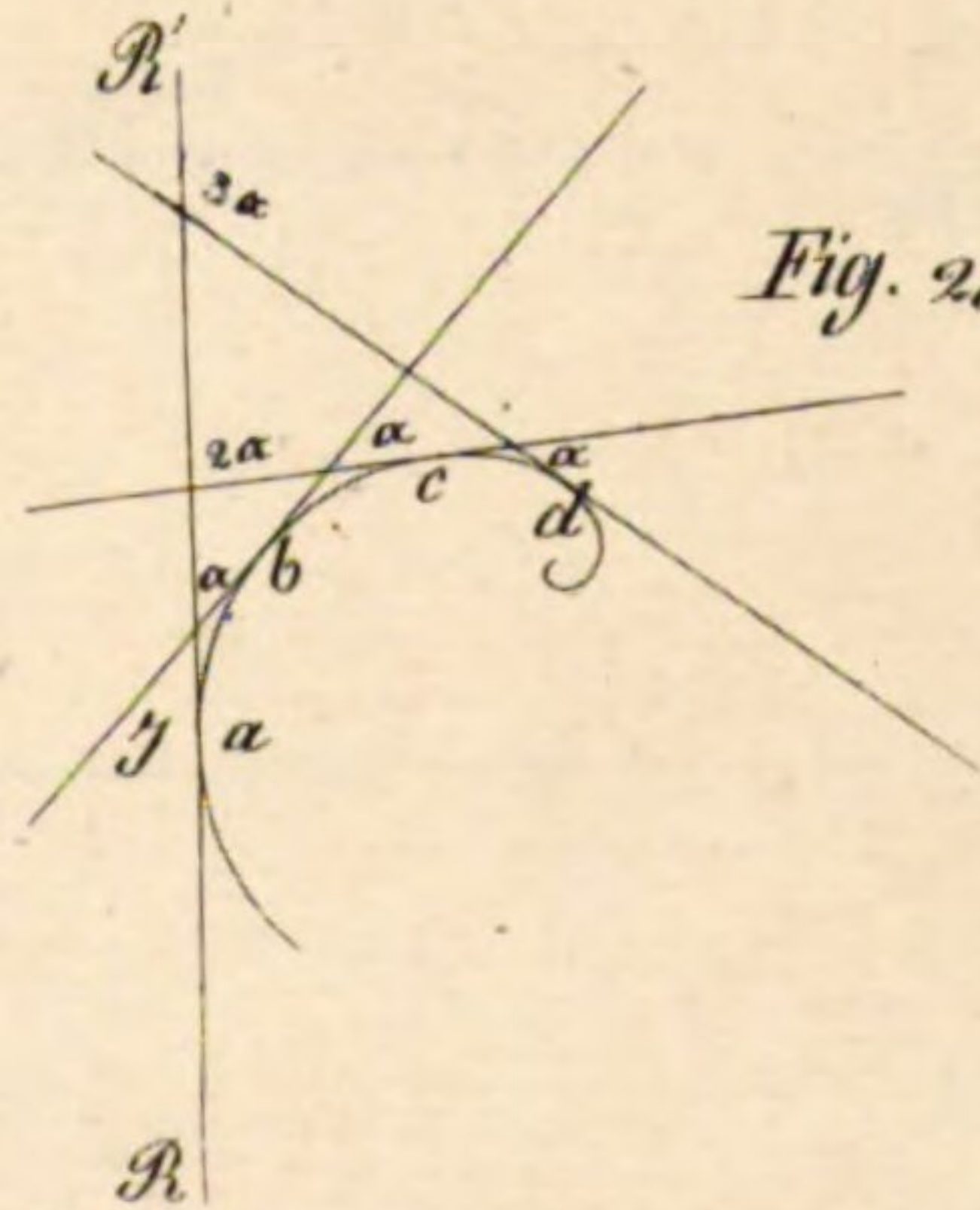


Fig. 23, d.



a $\bar{ab} = \bar{I}$ ad Fig. 24. b

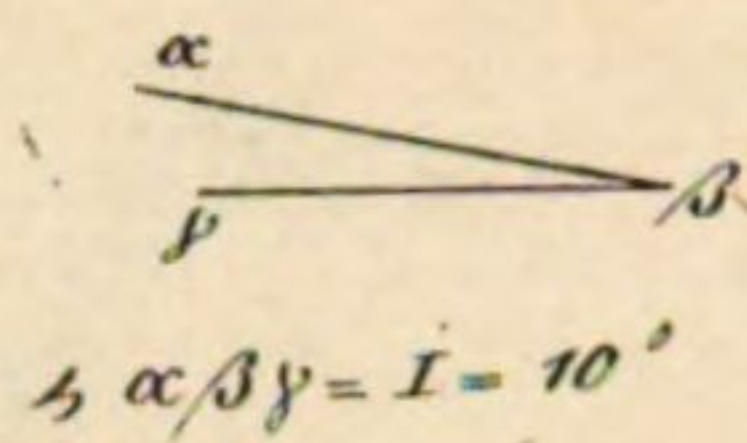


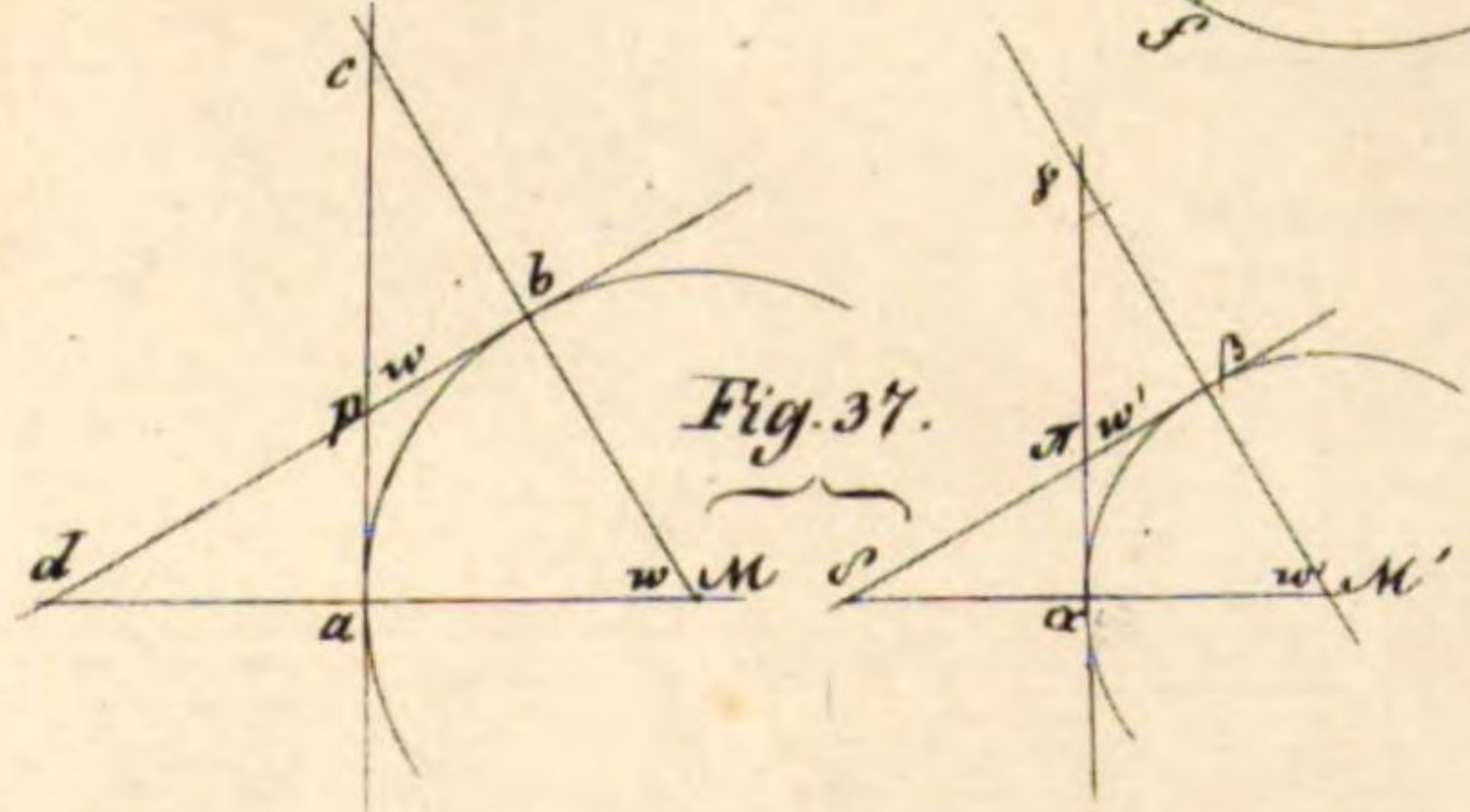
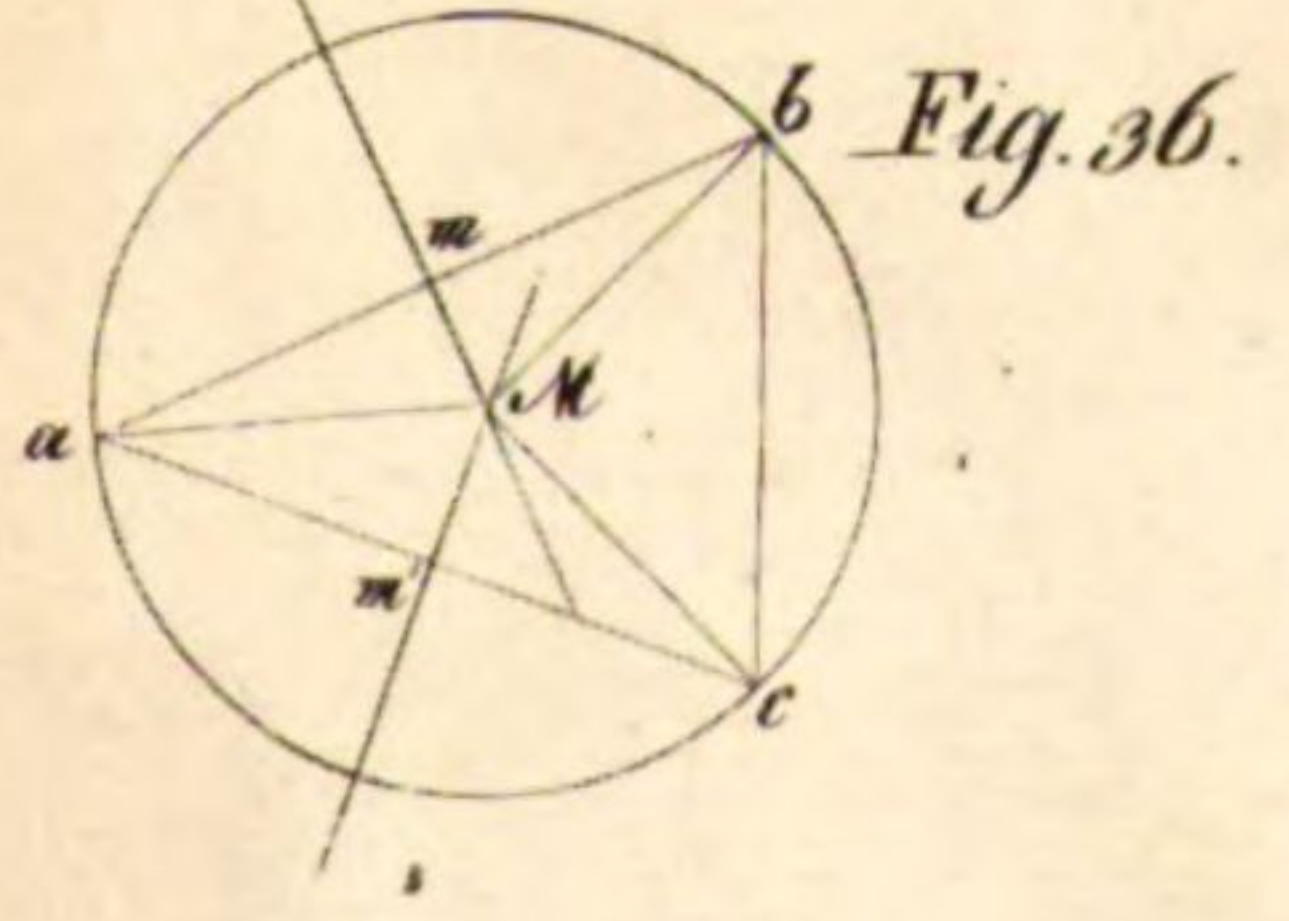
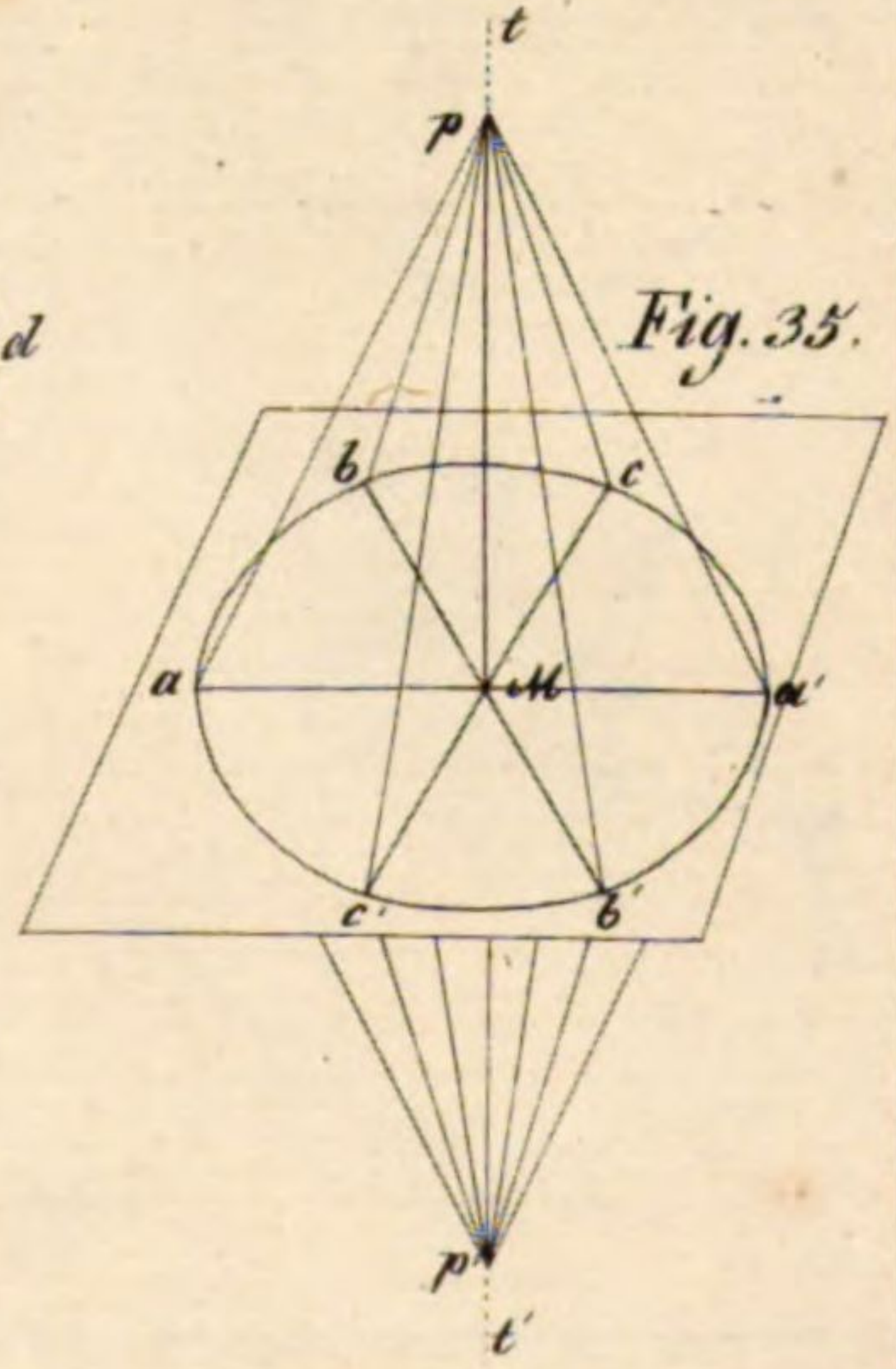
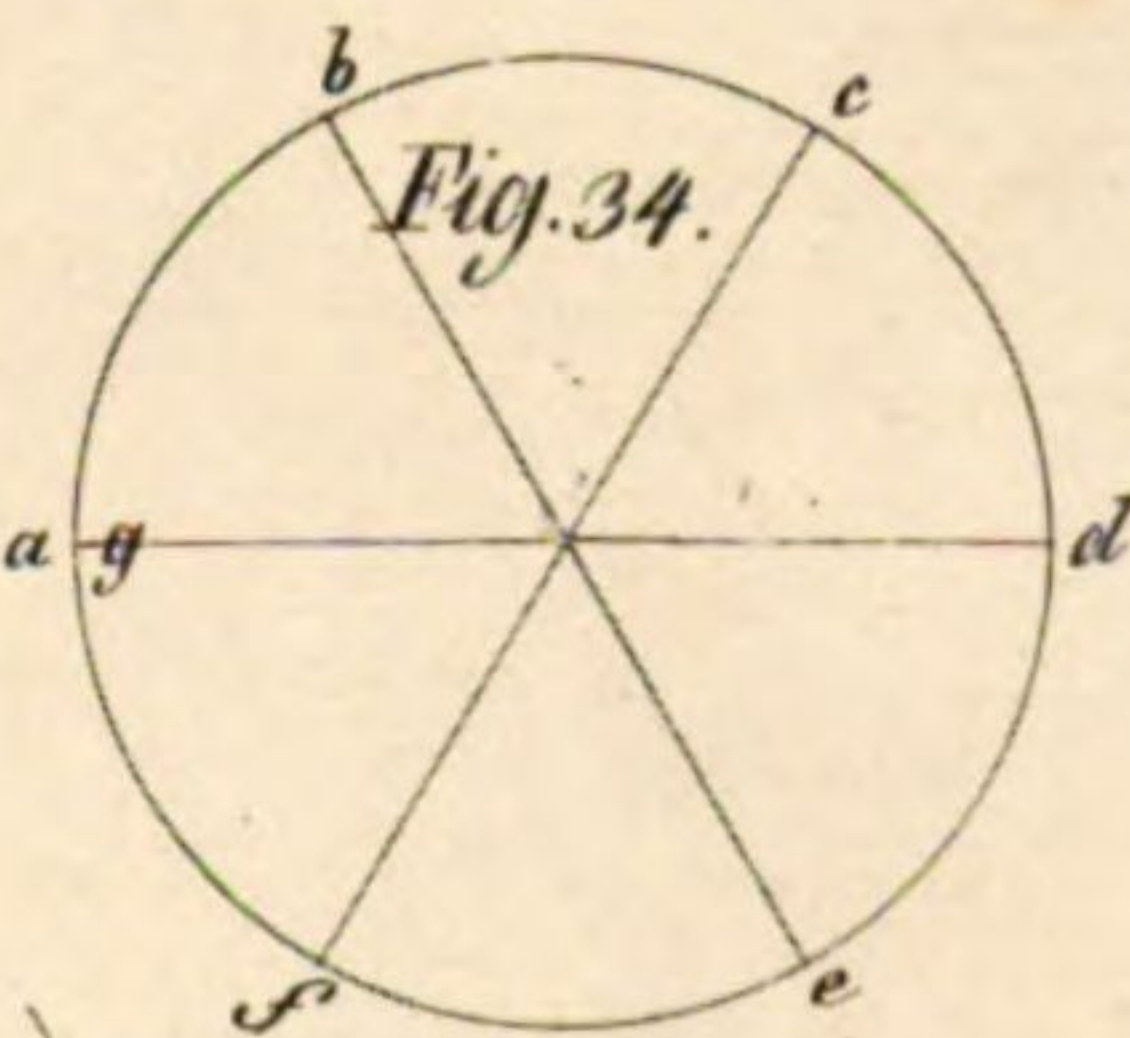
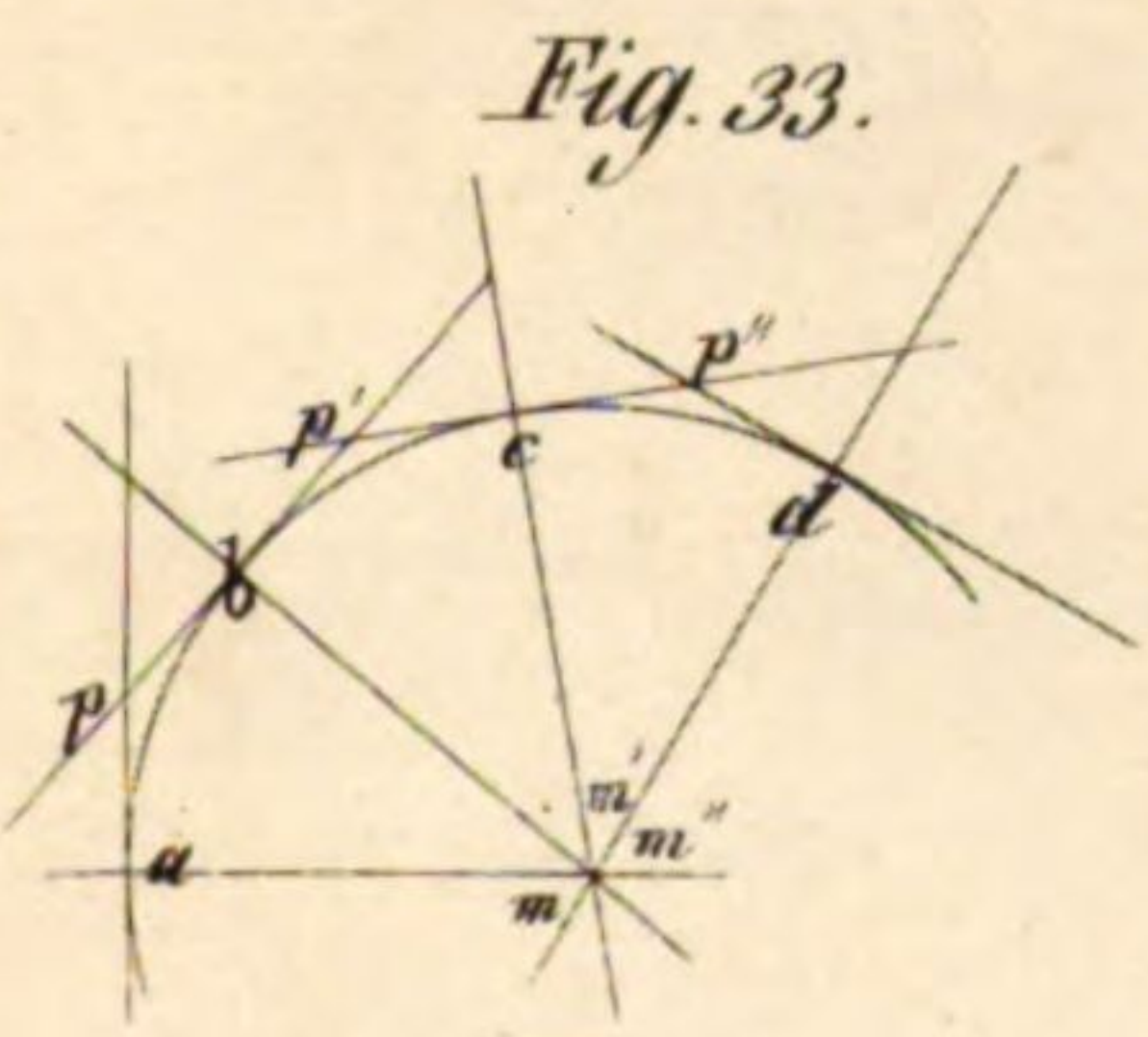
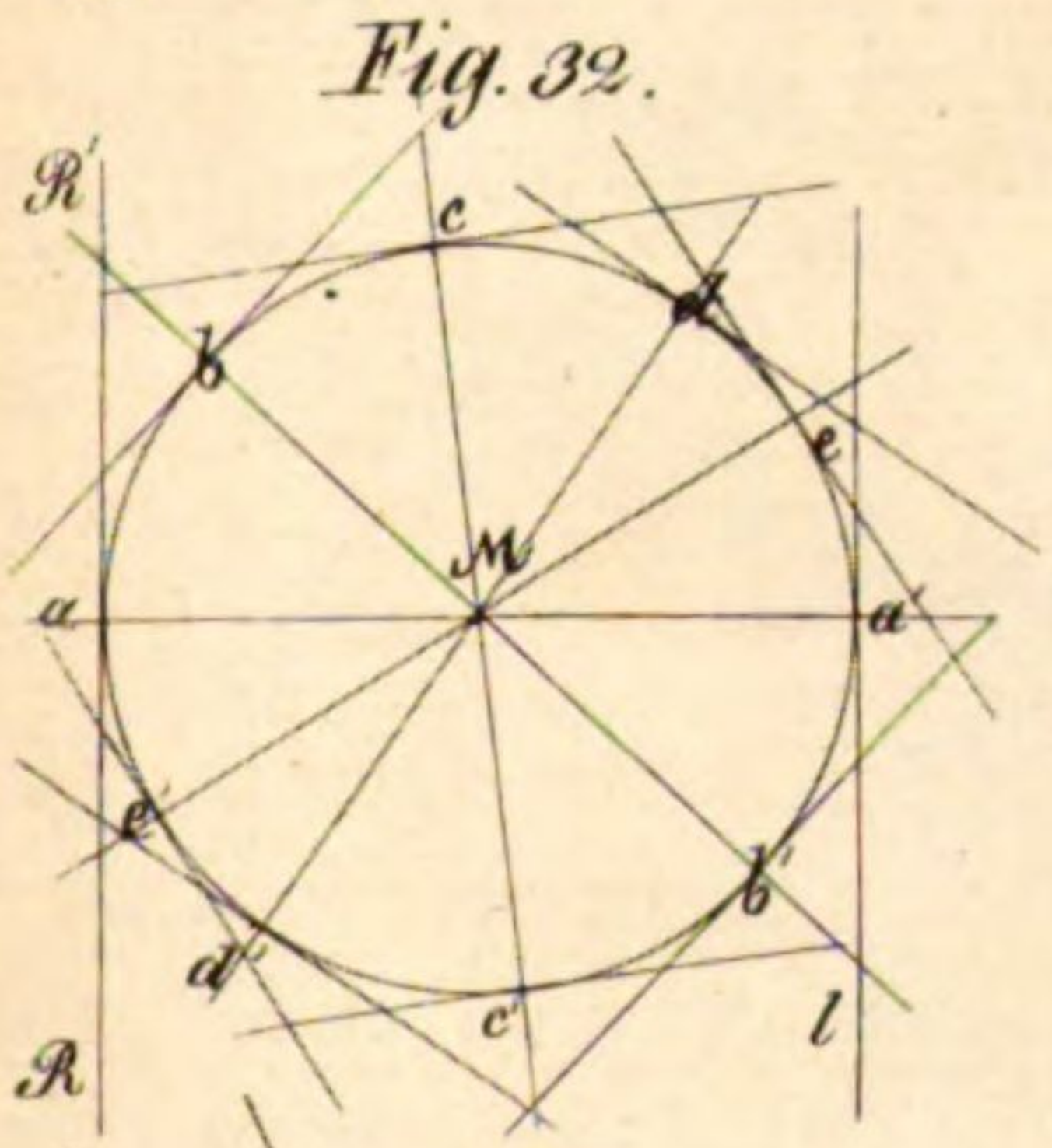
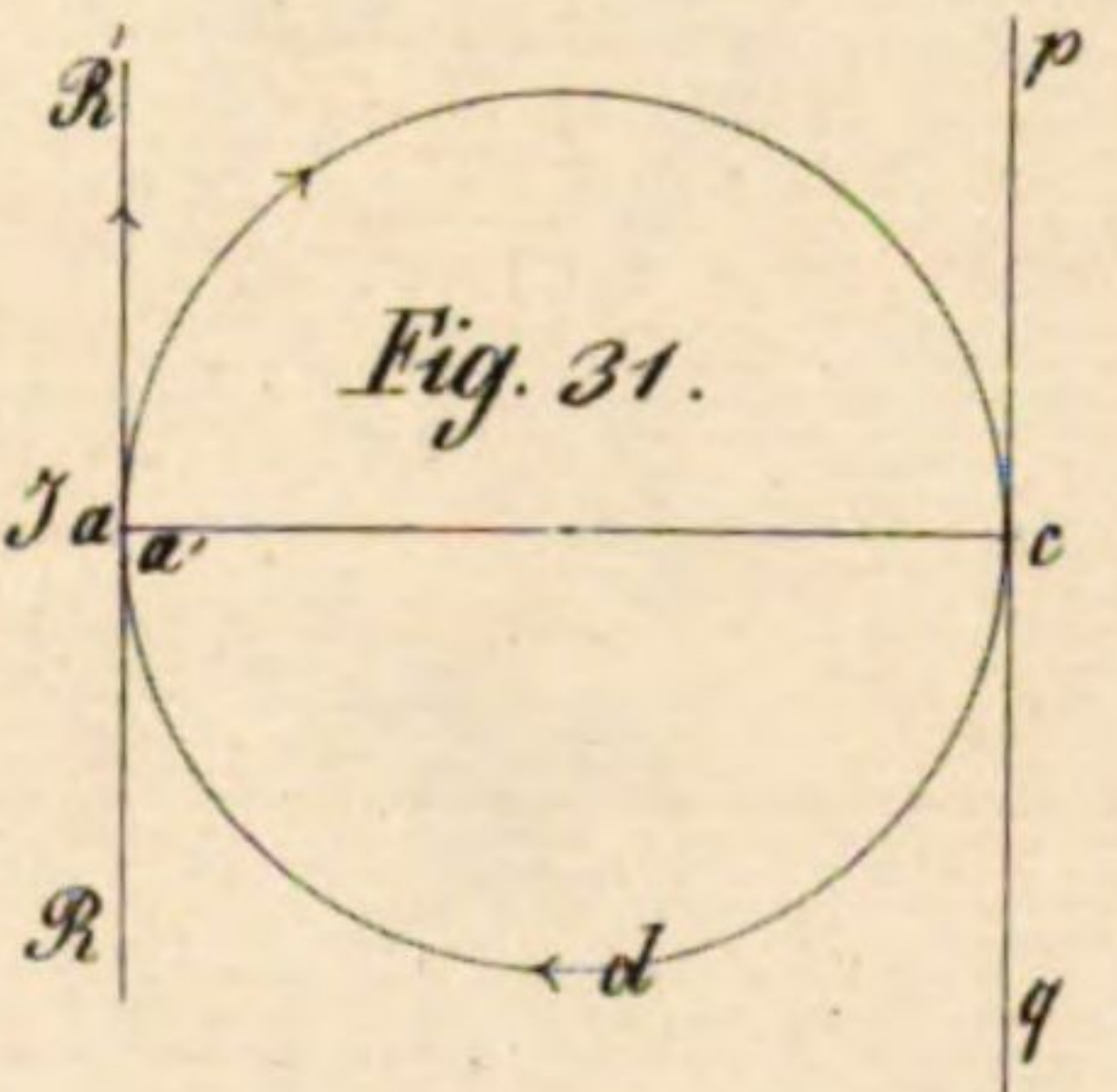
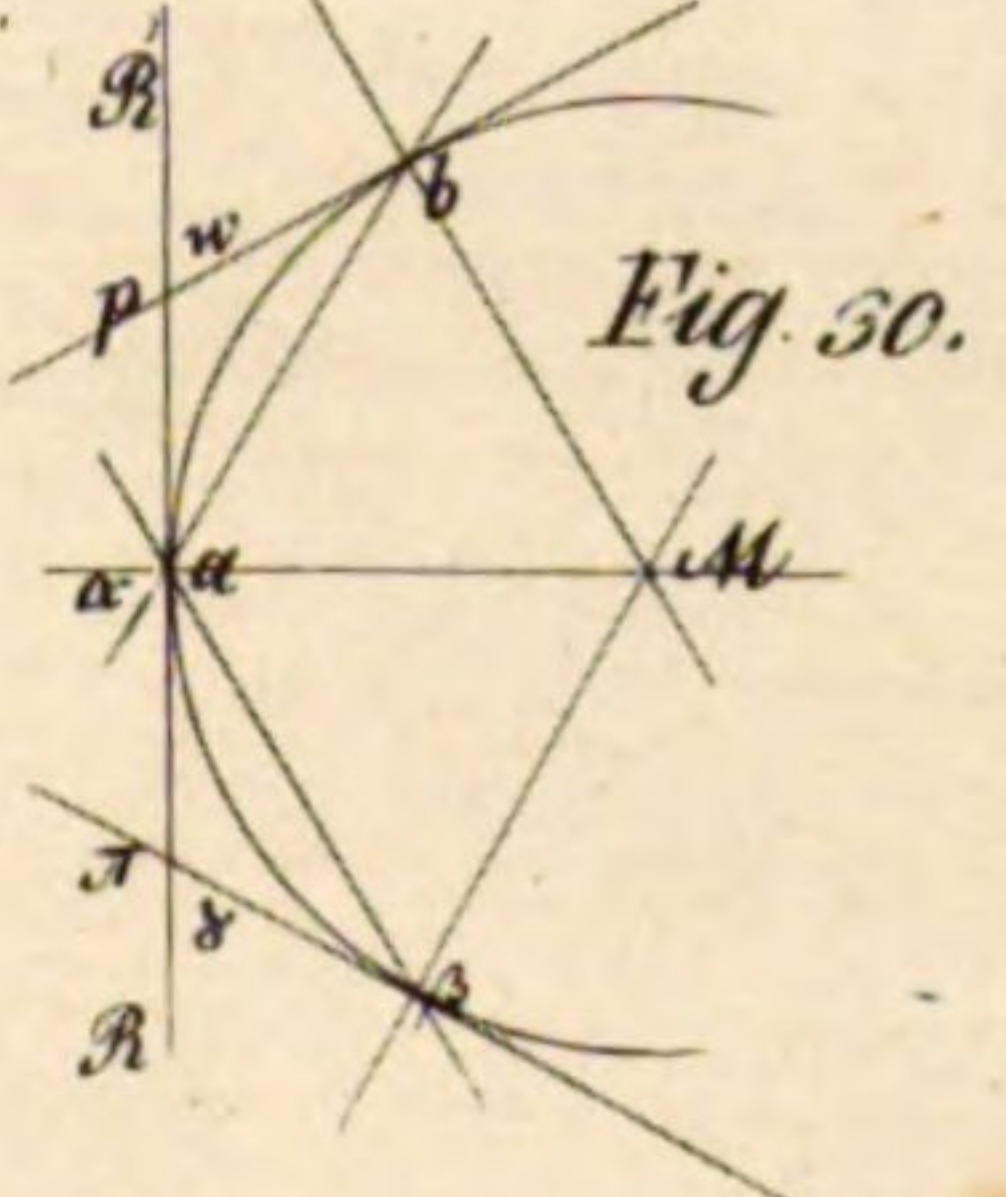
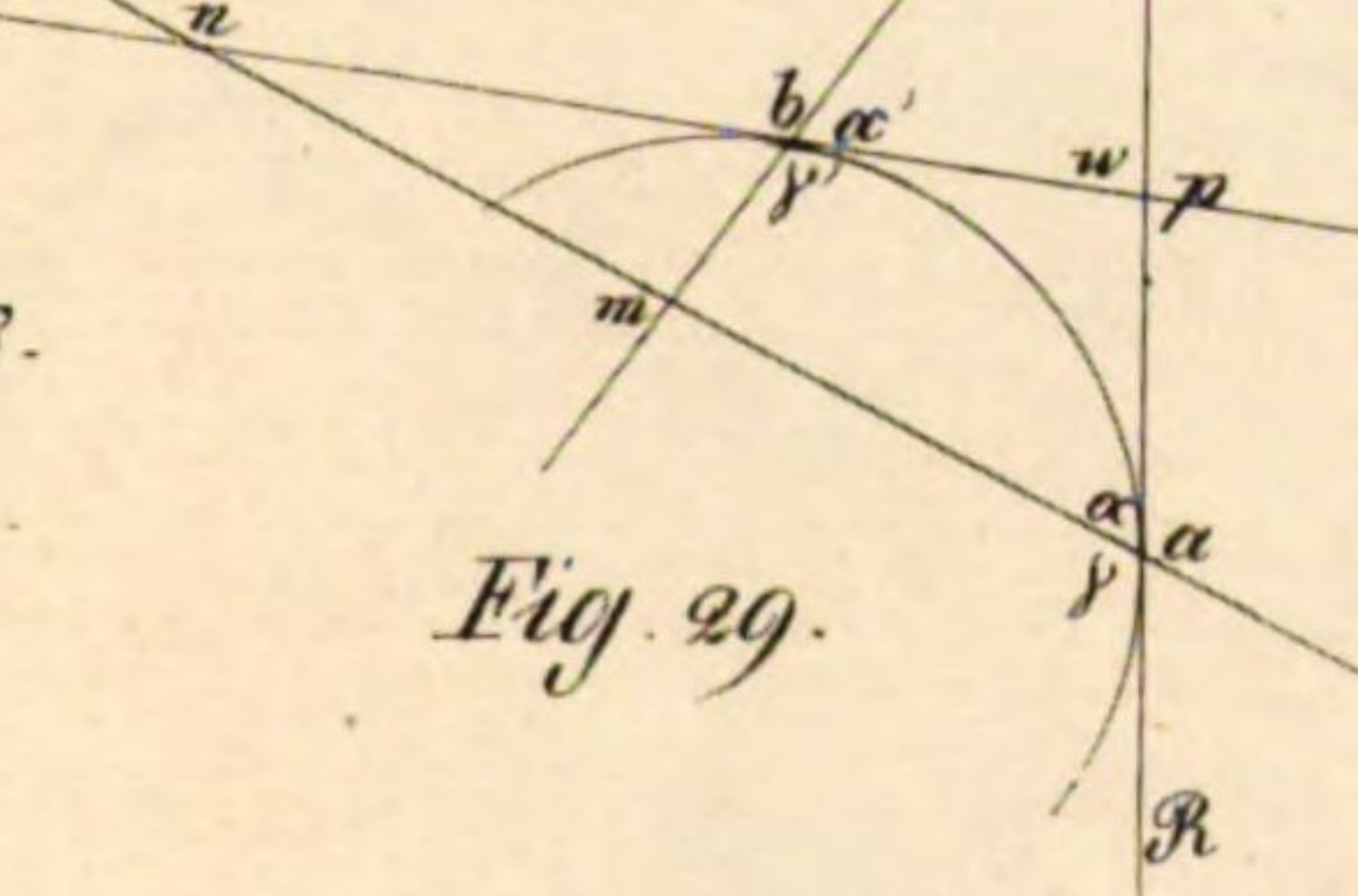
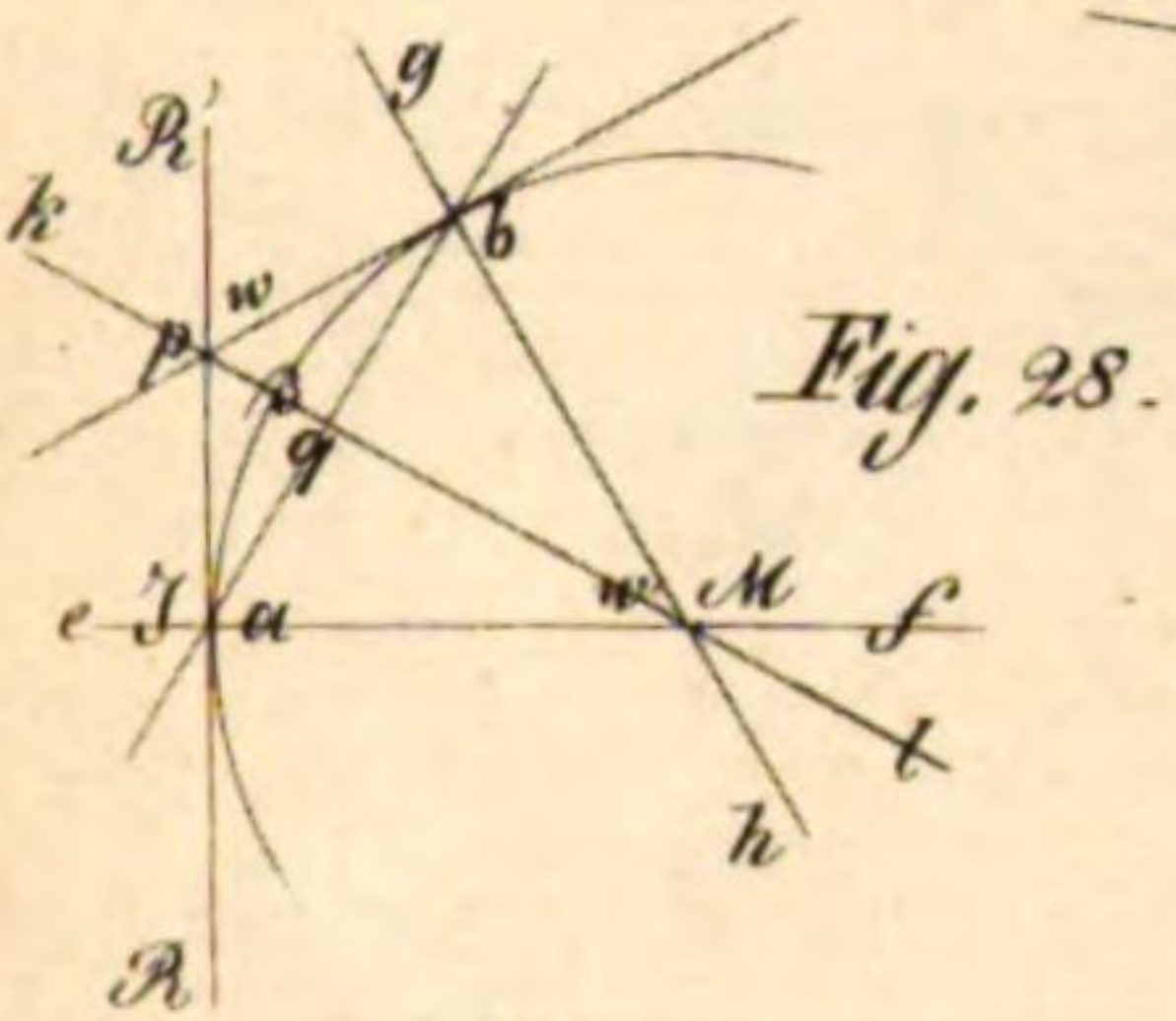
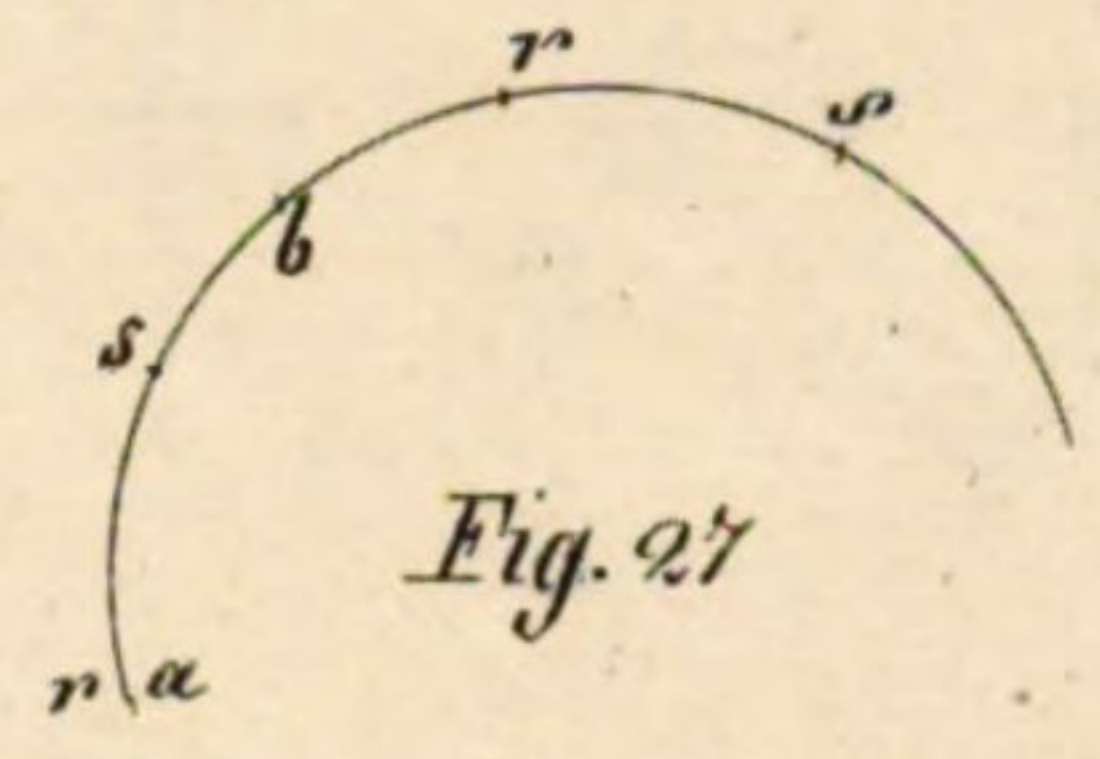
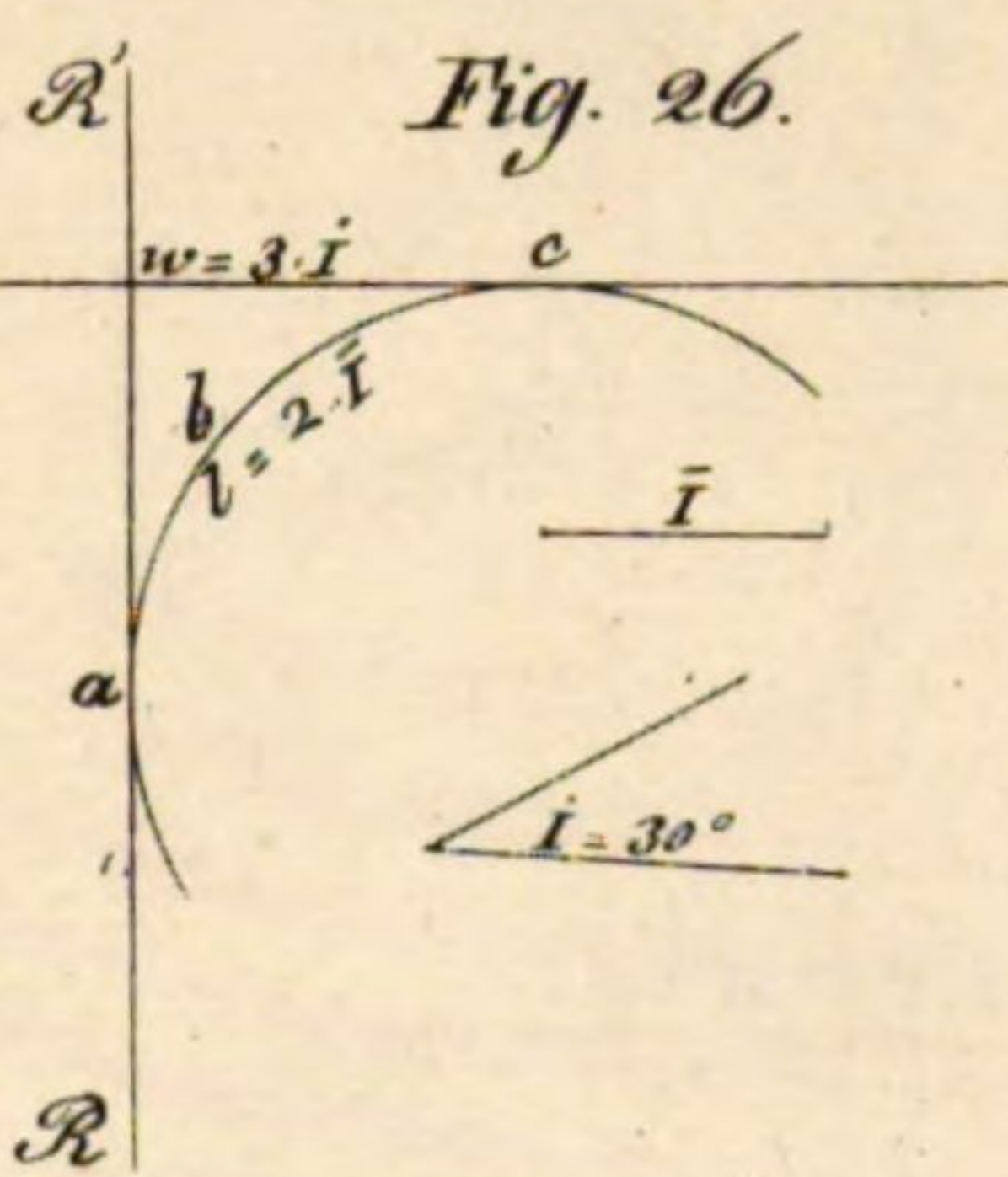
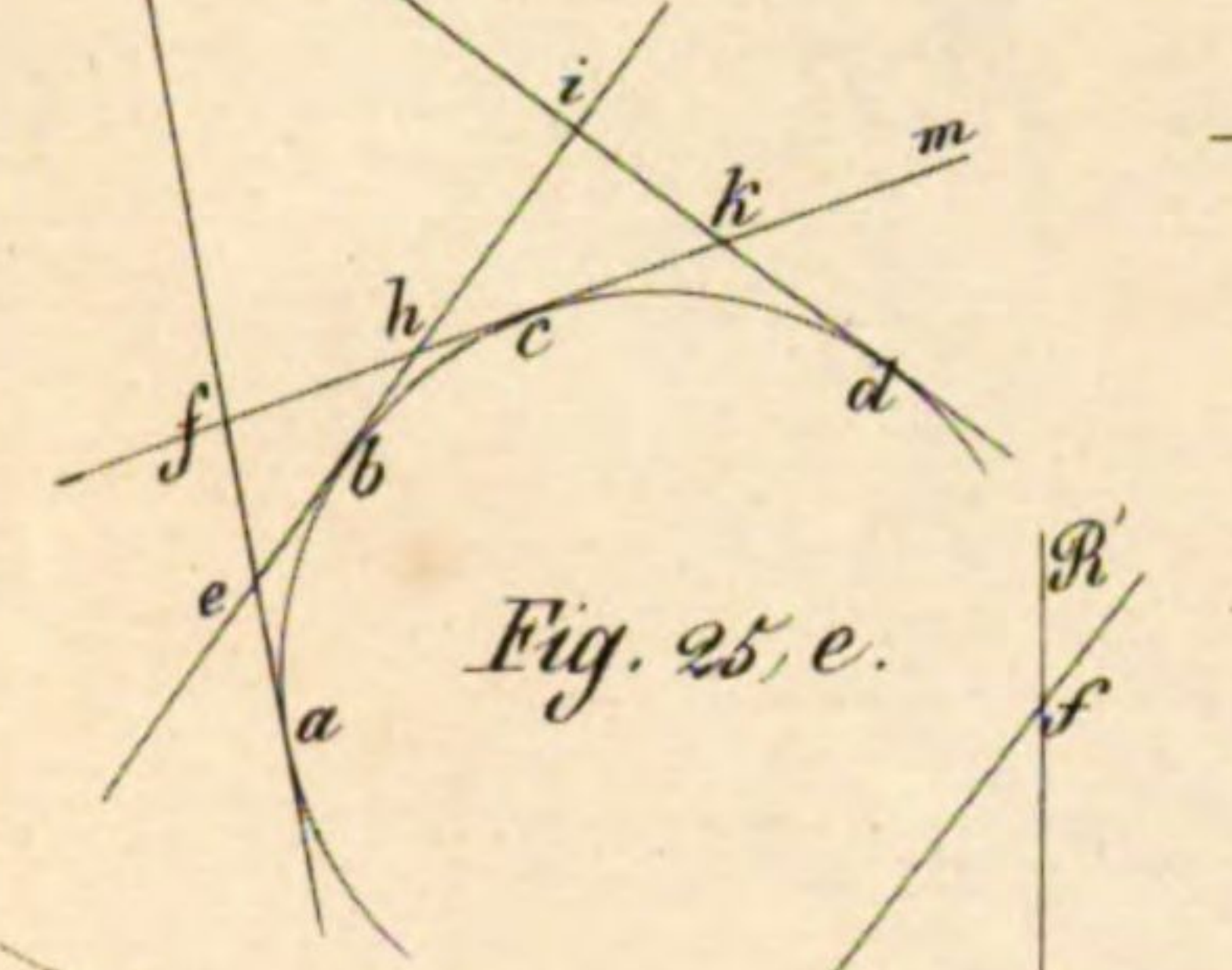
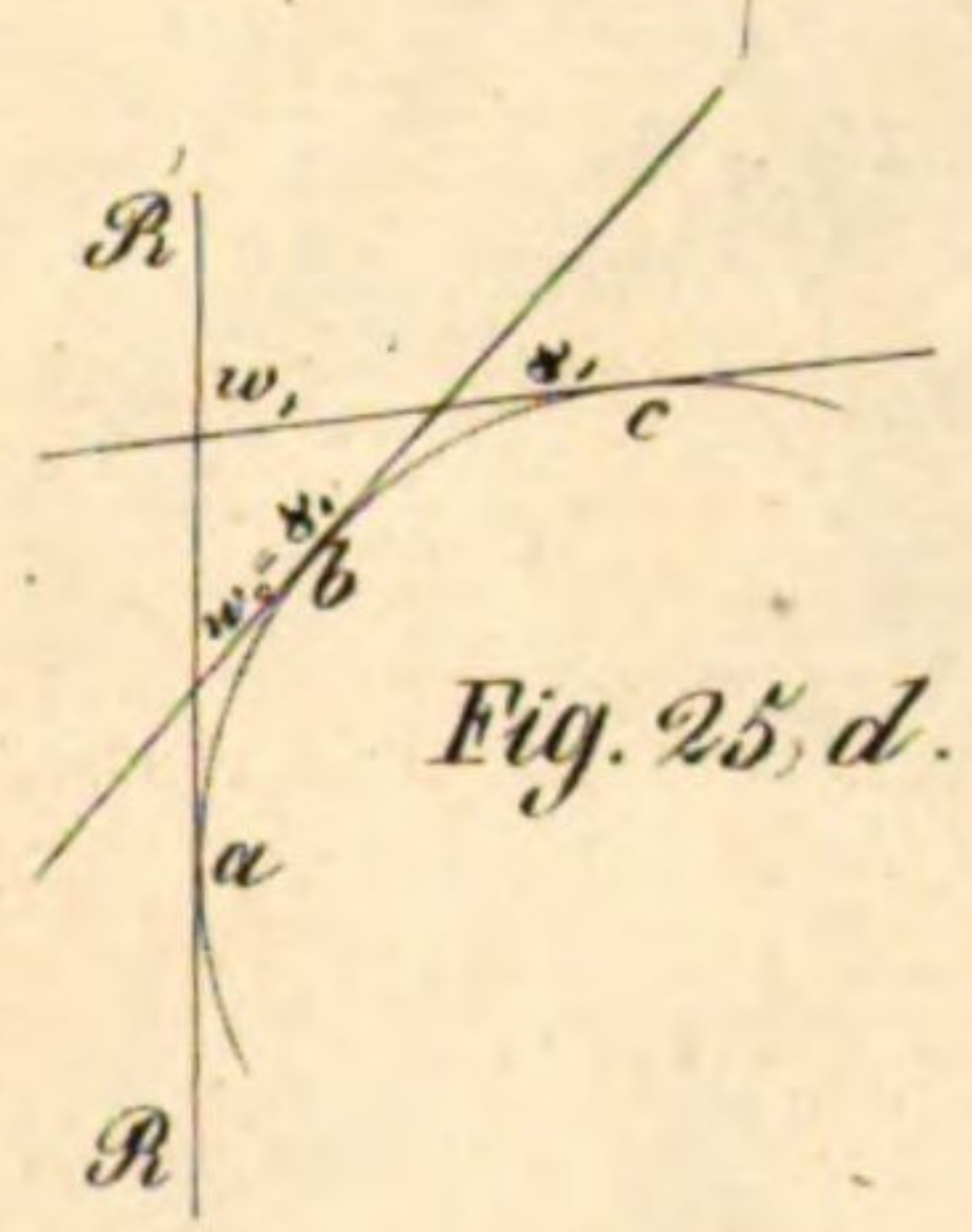
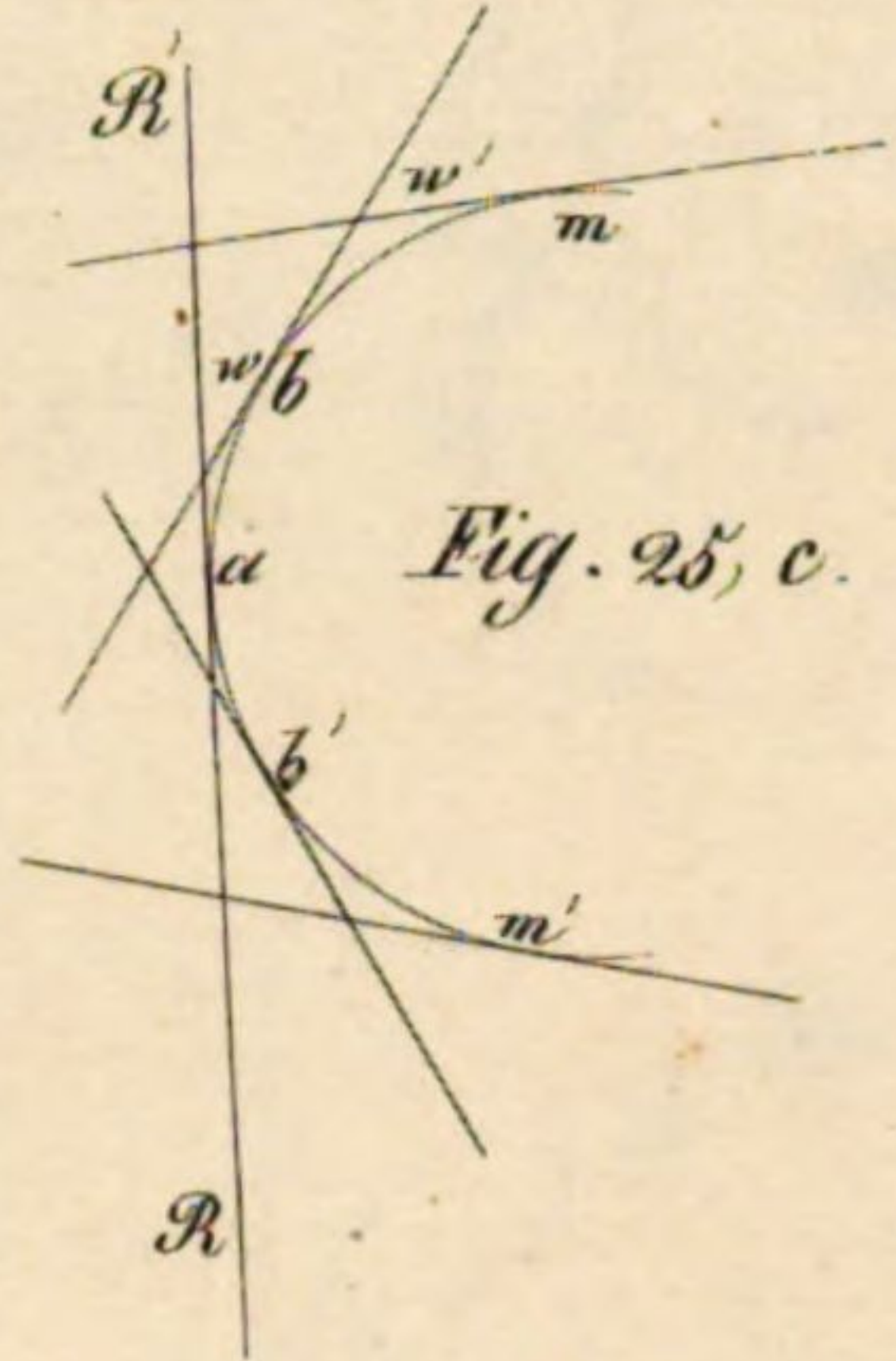
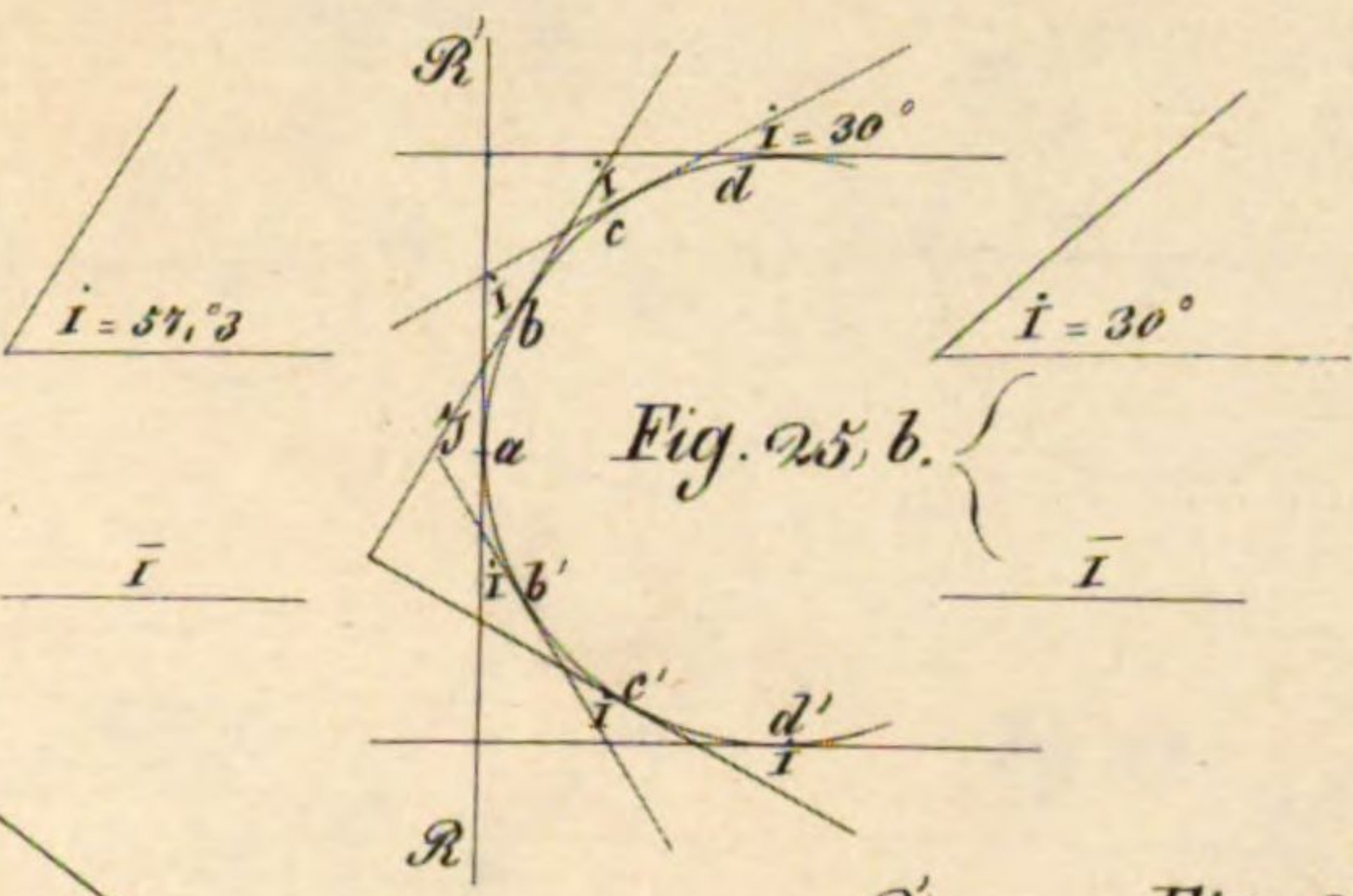
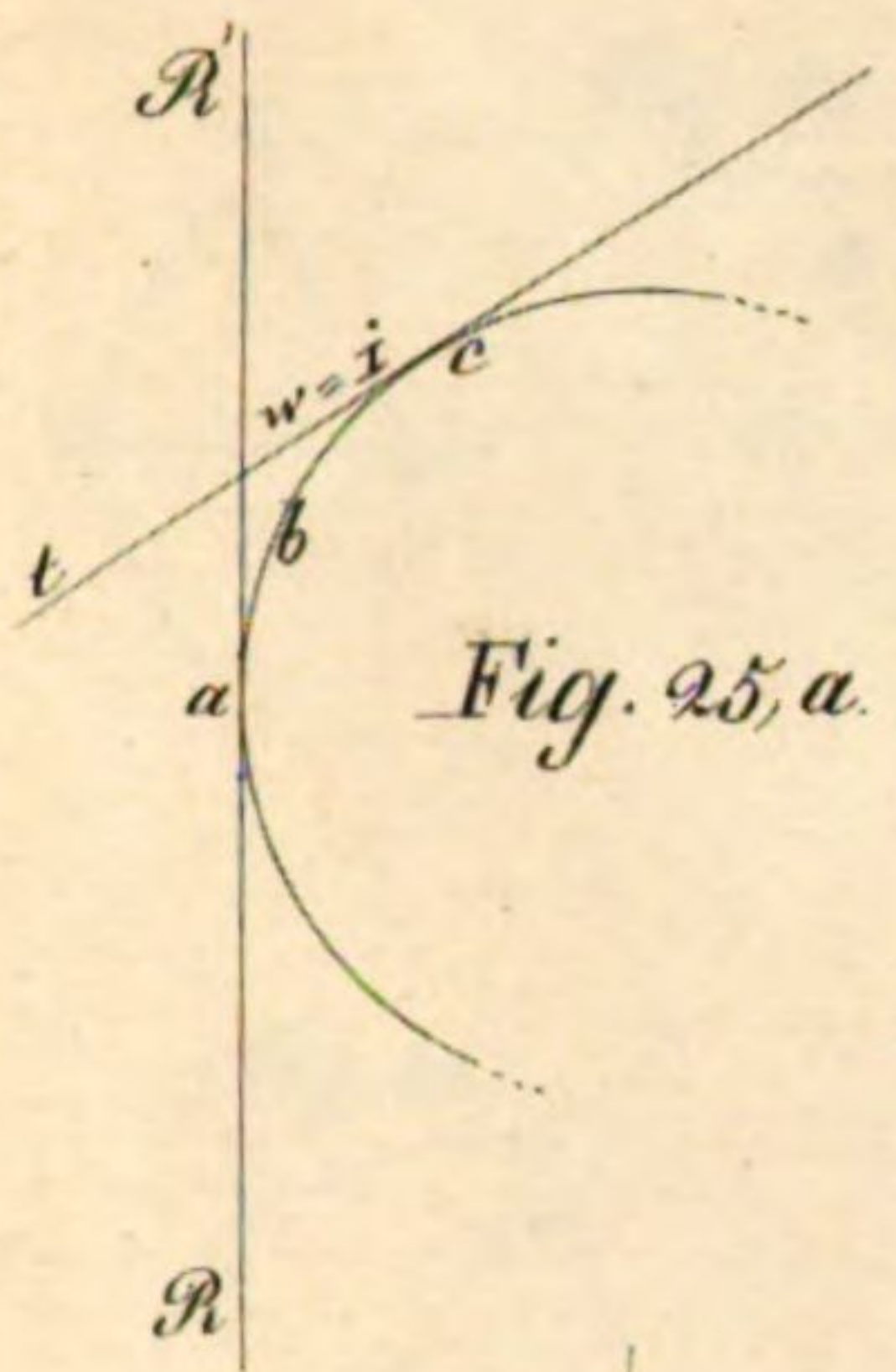
Fig. 24.

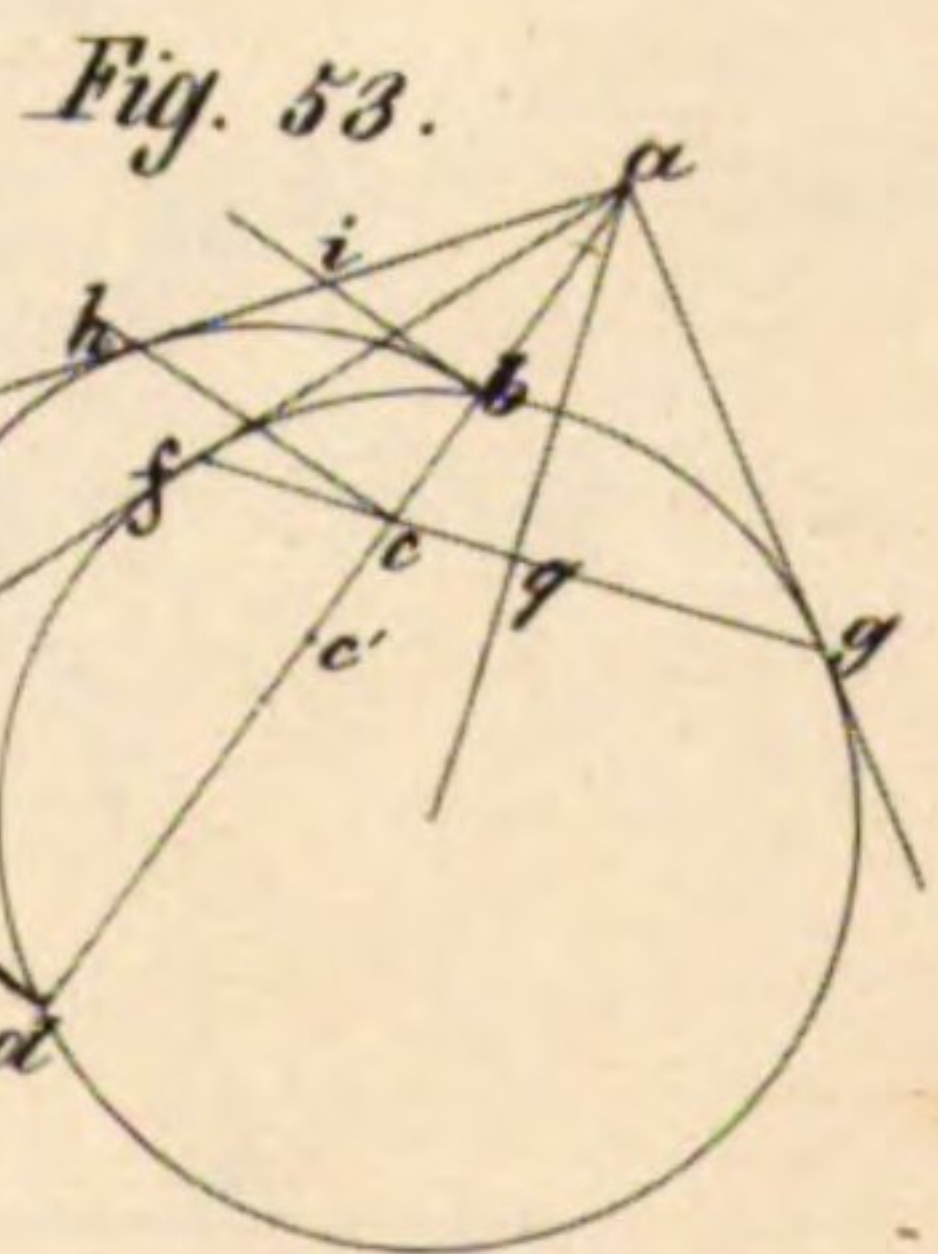
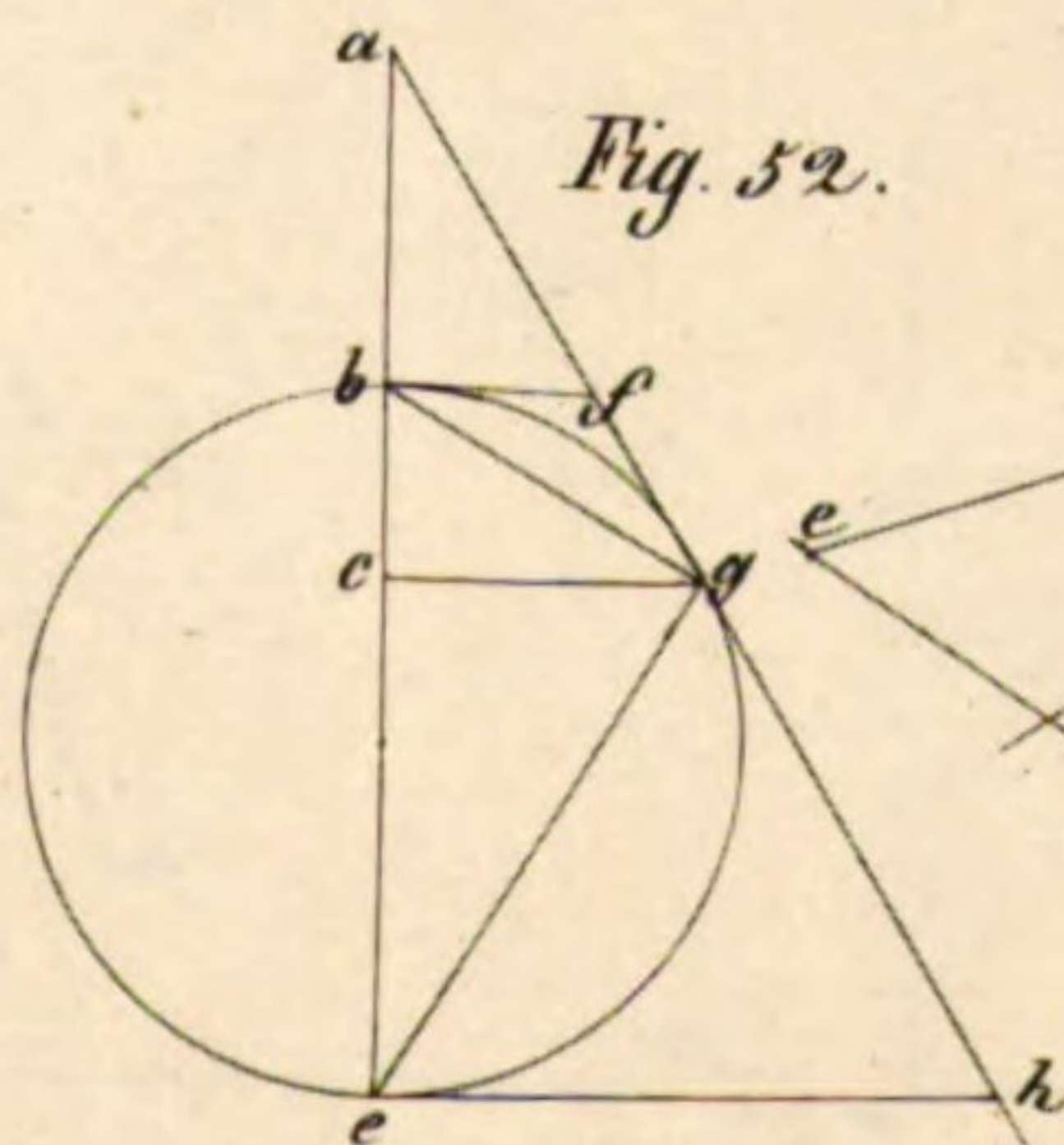
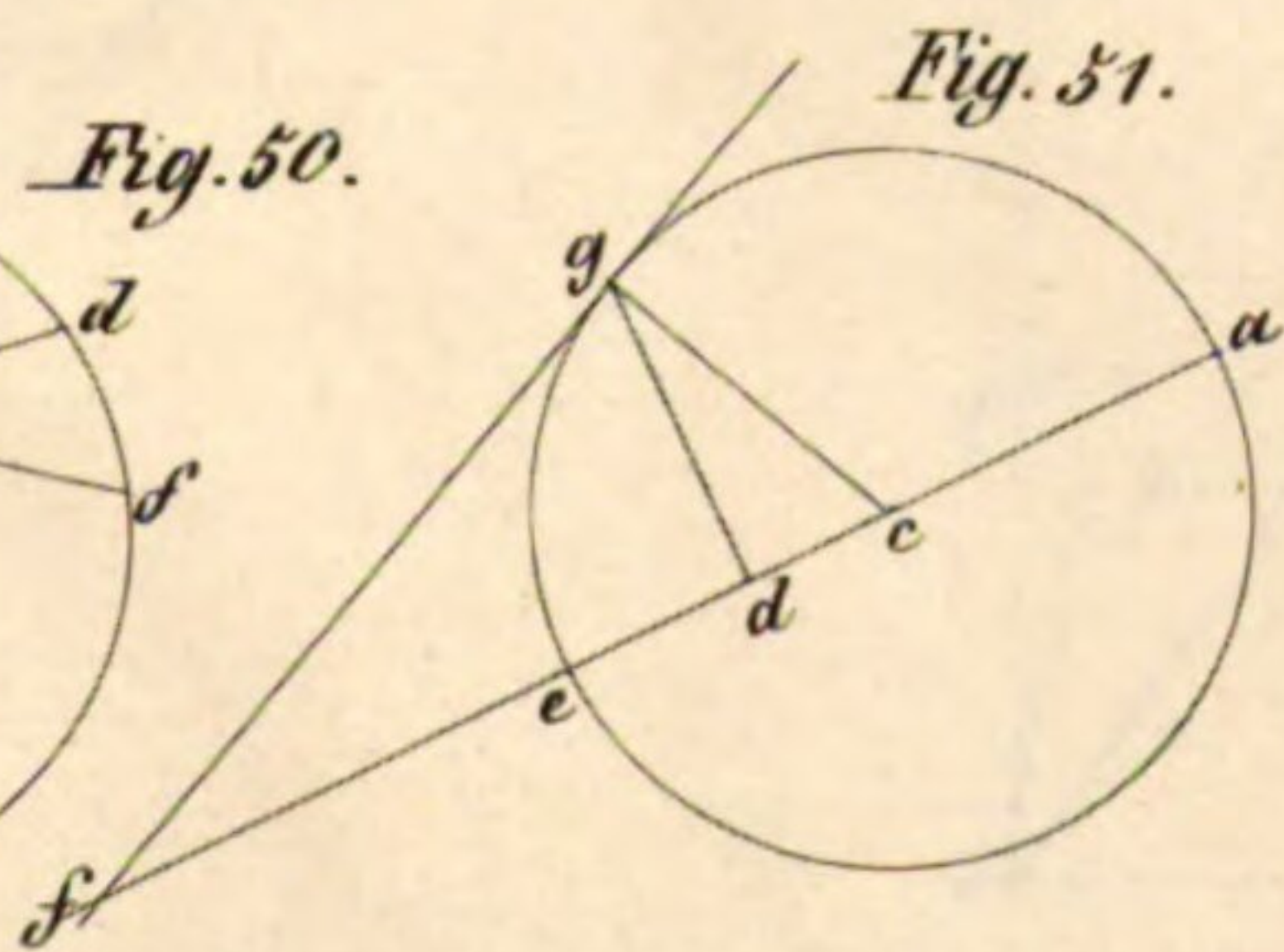
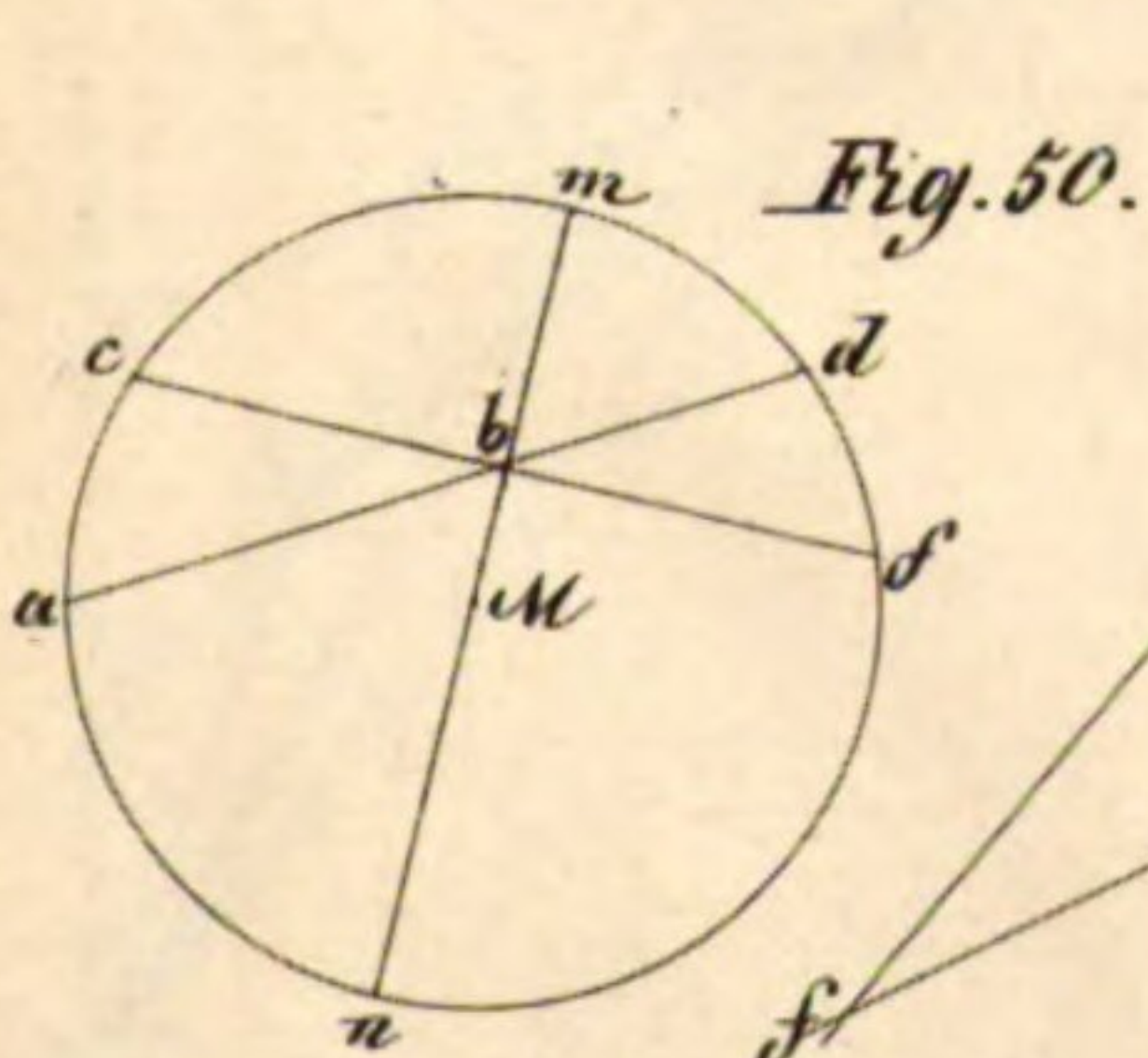
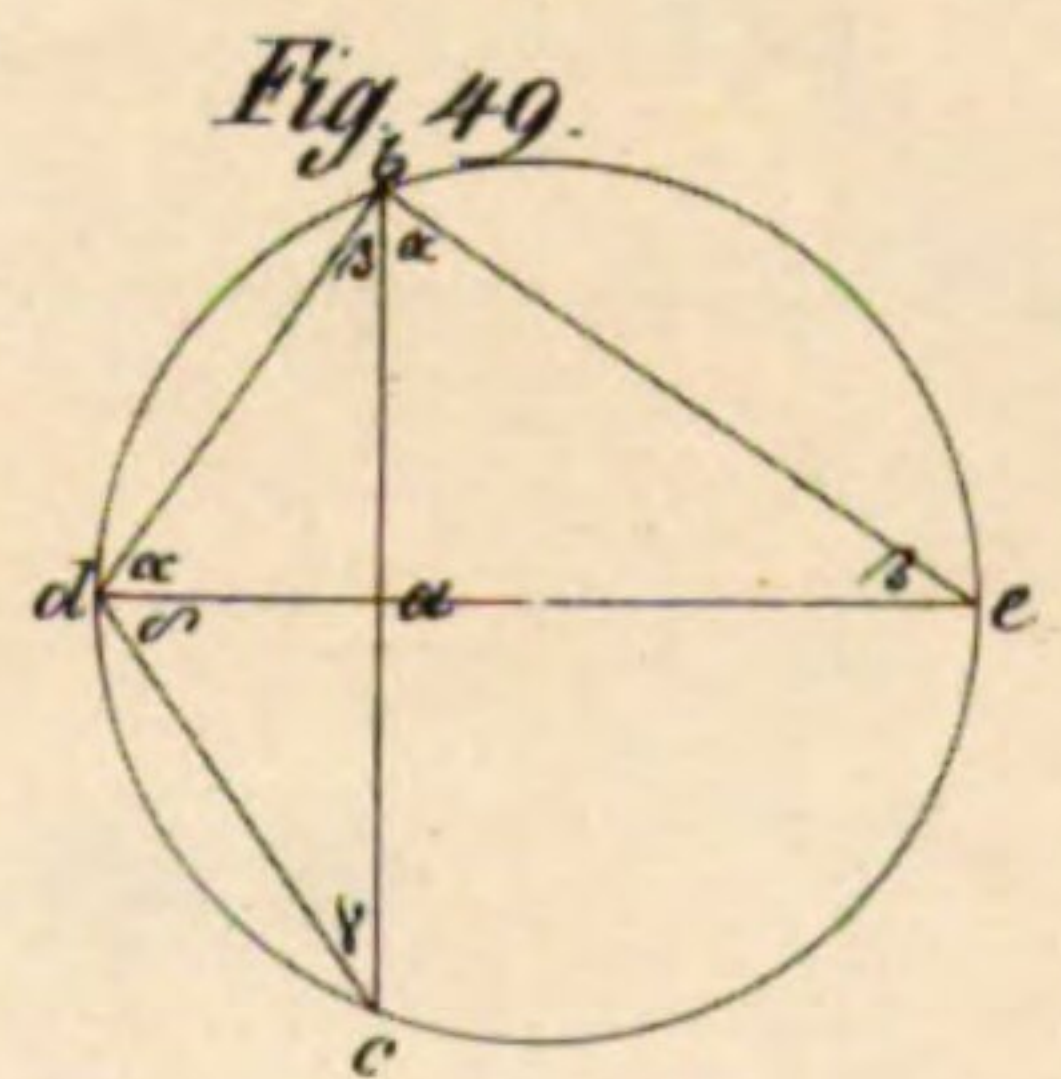
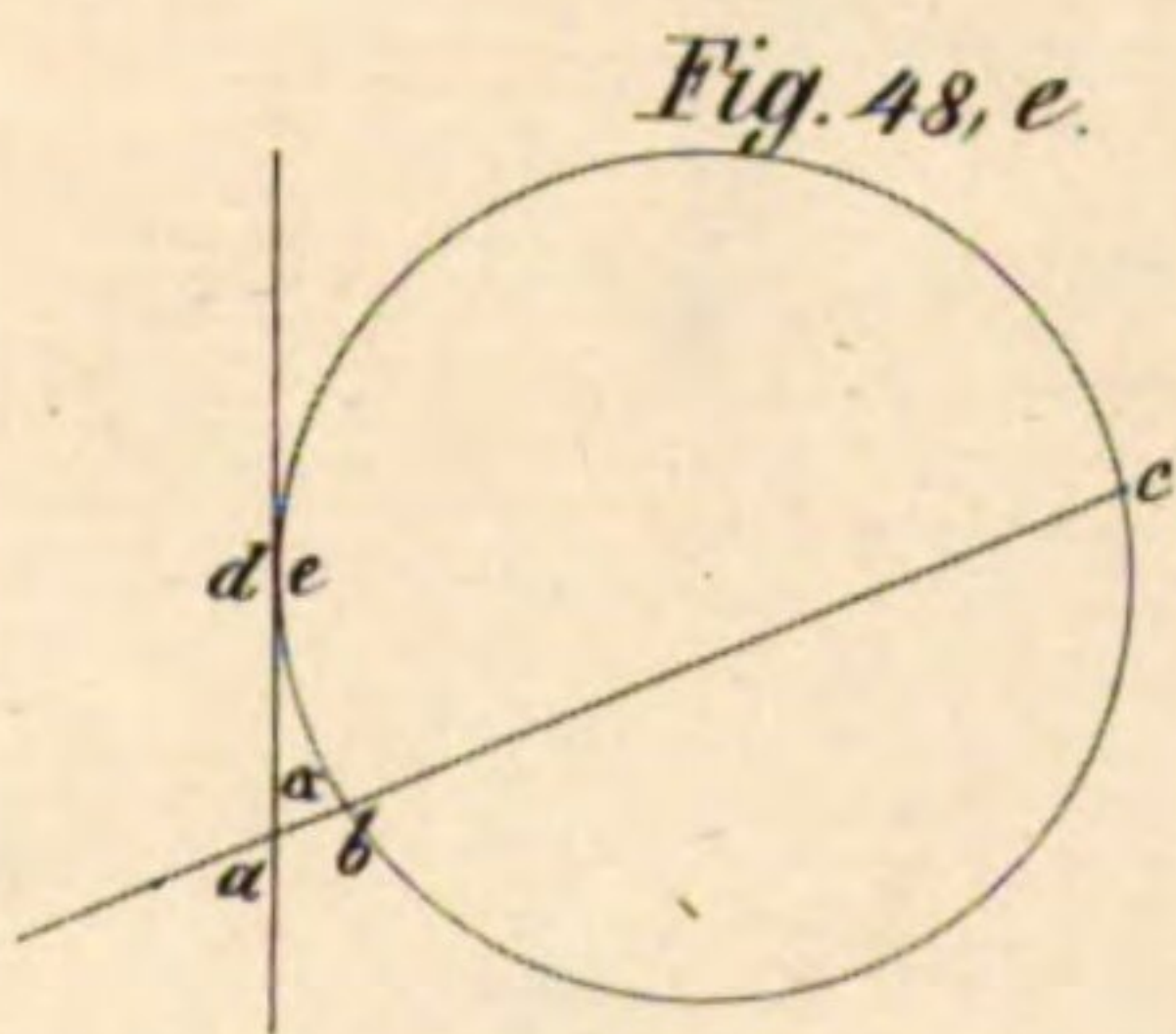
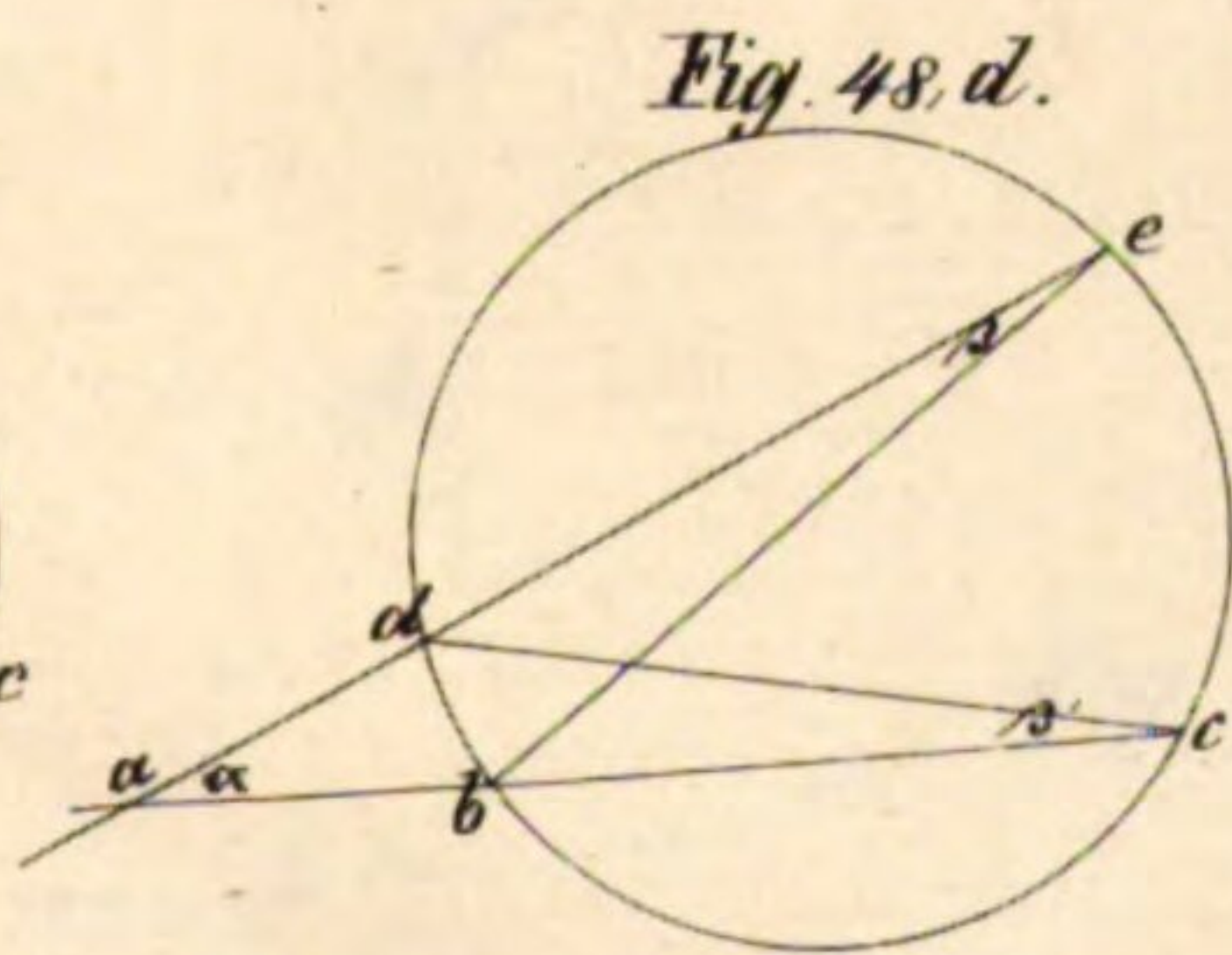
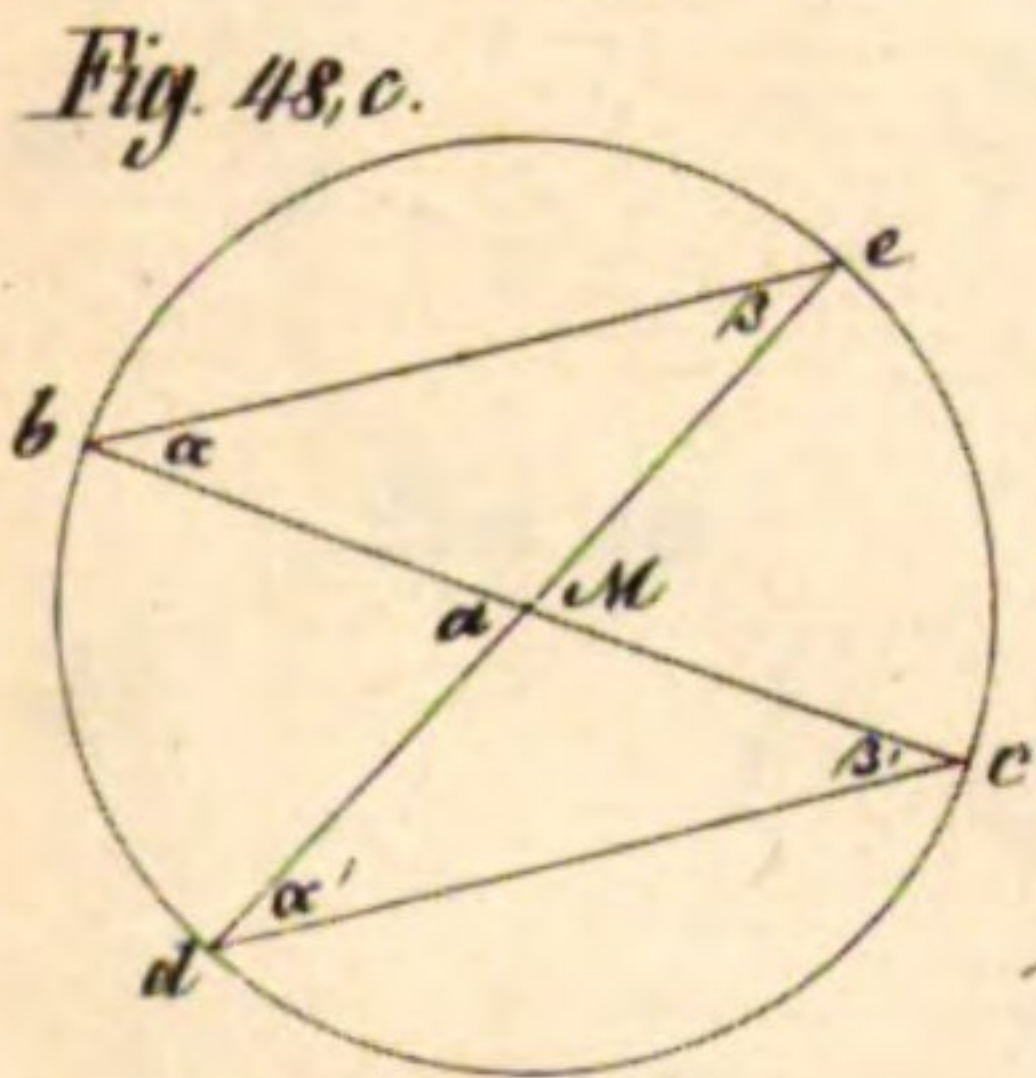
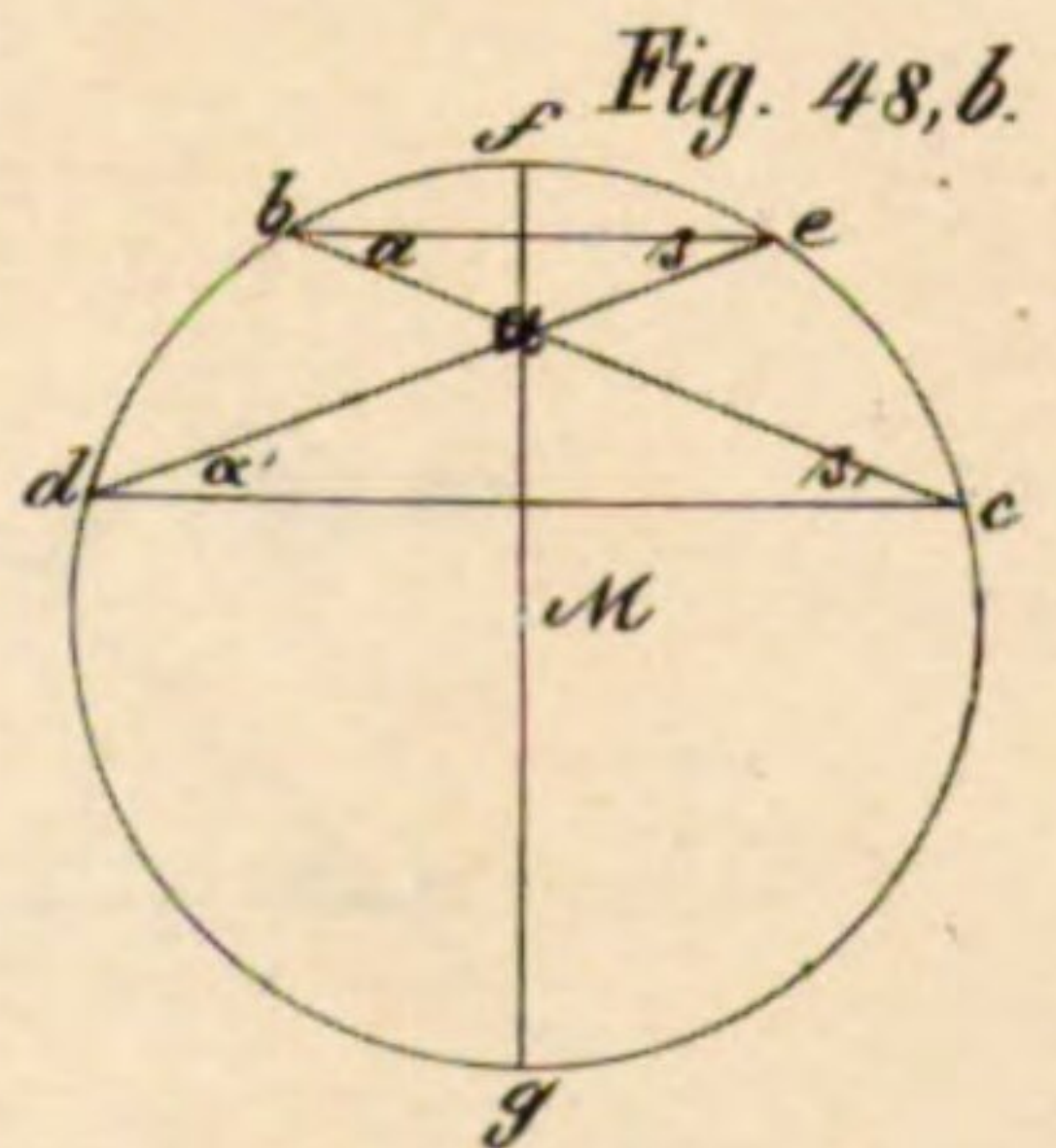
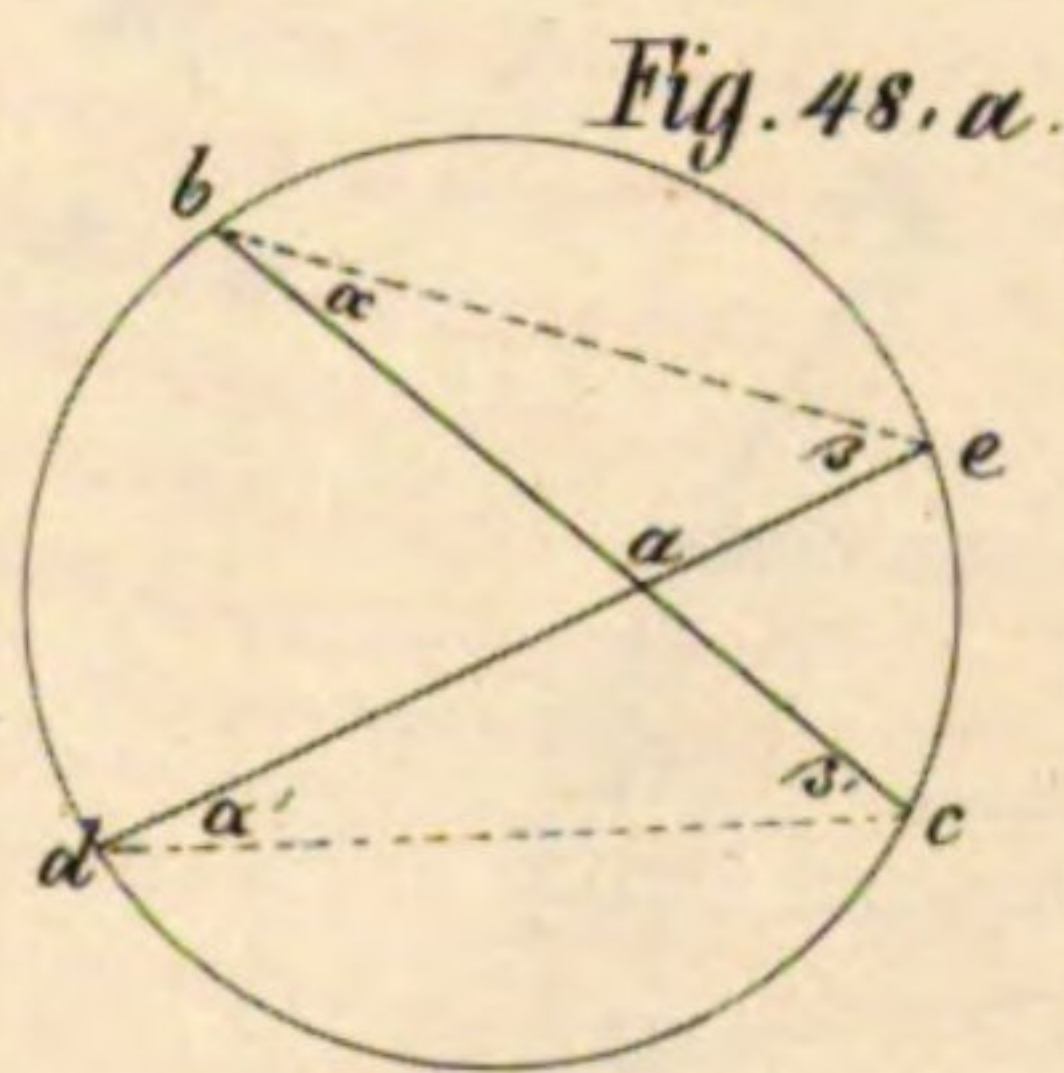
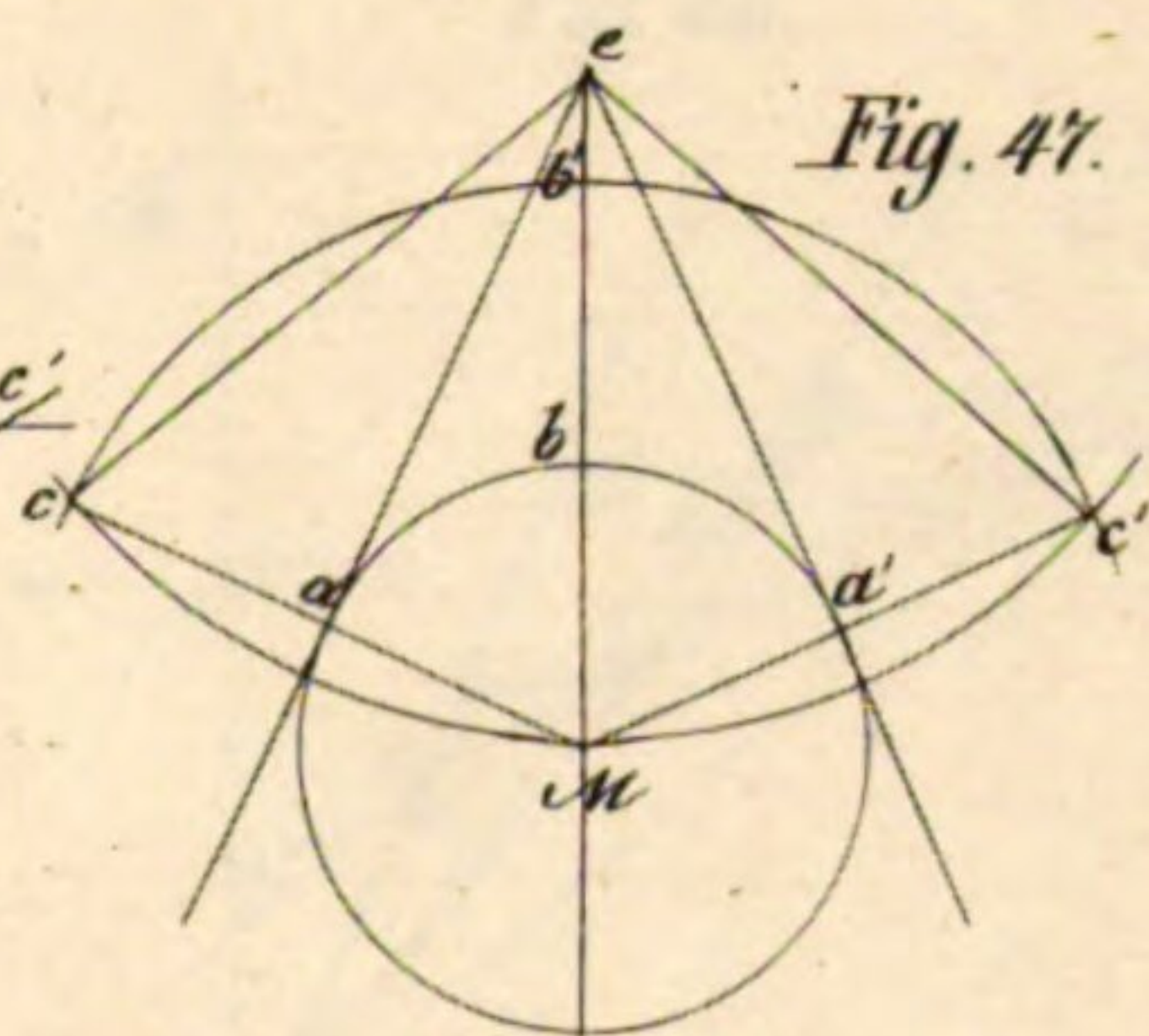
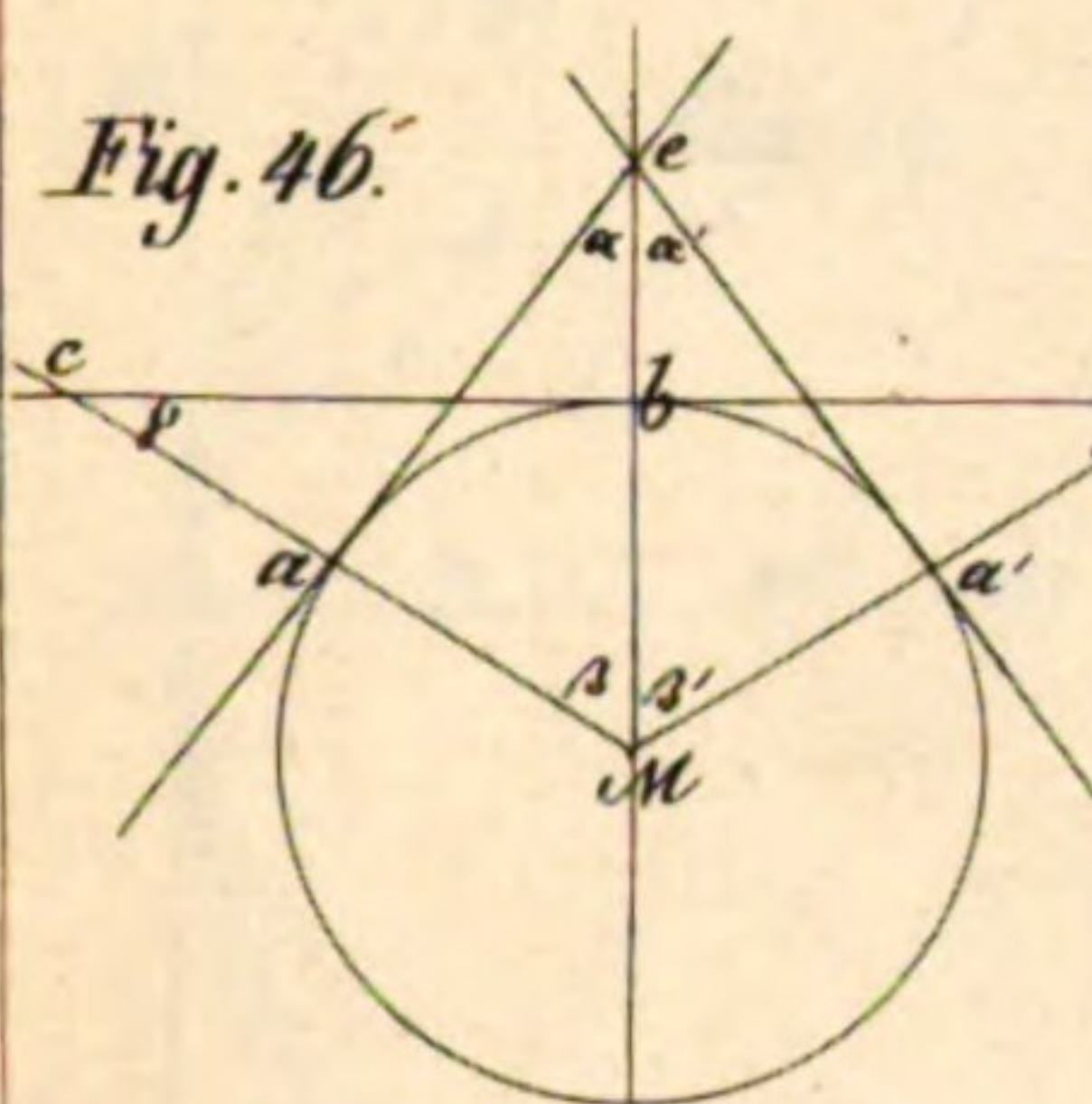
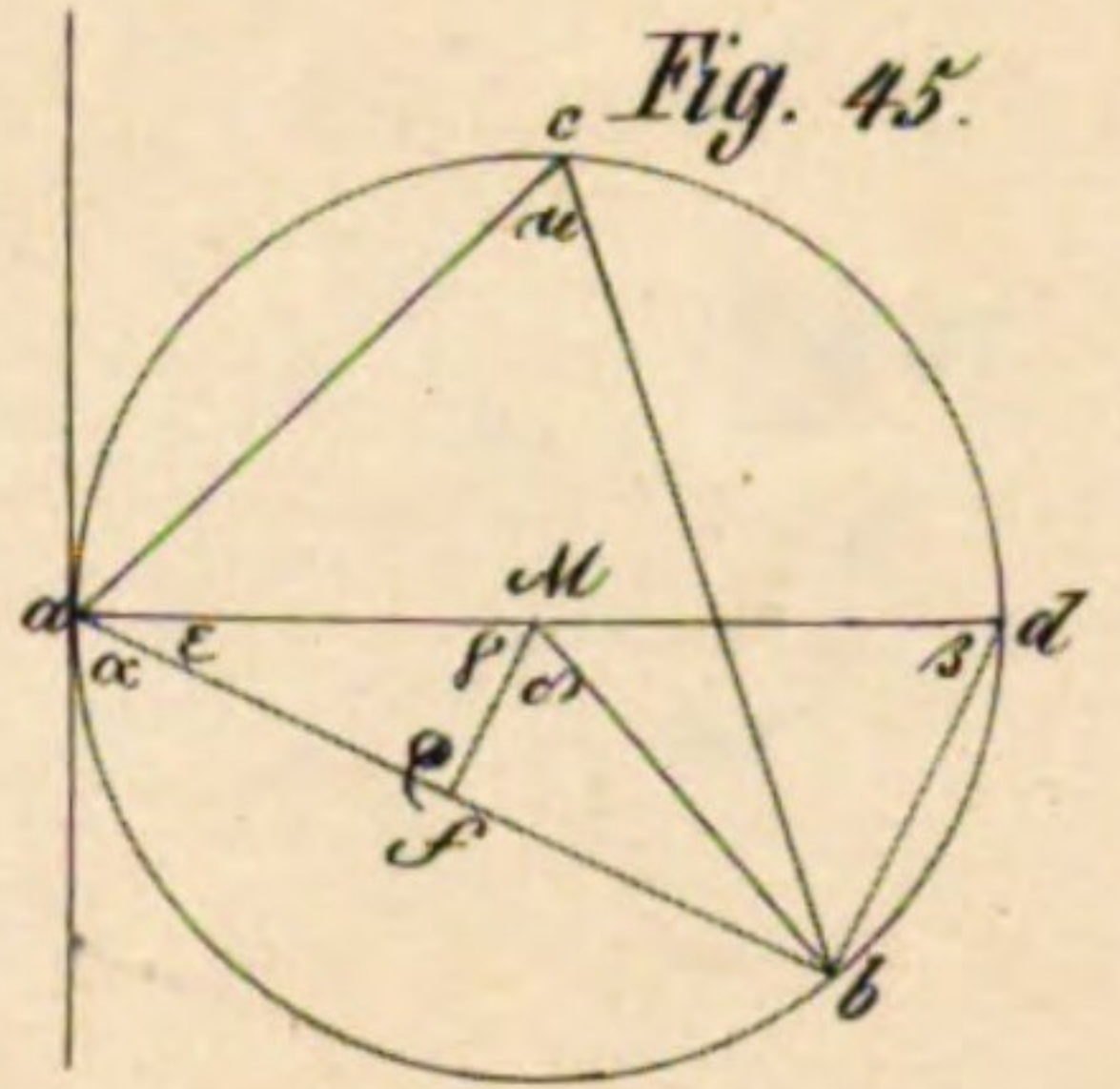
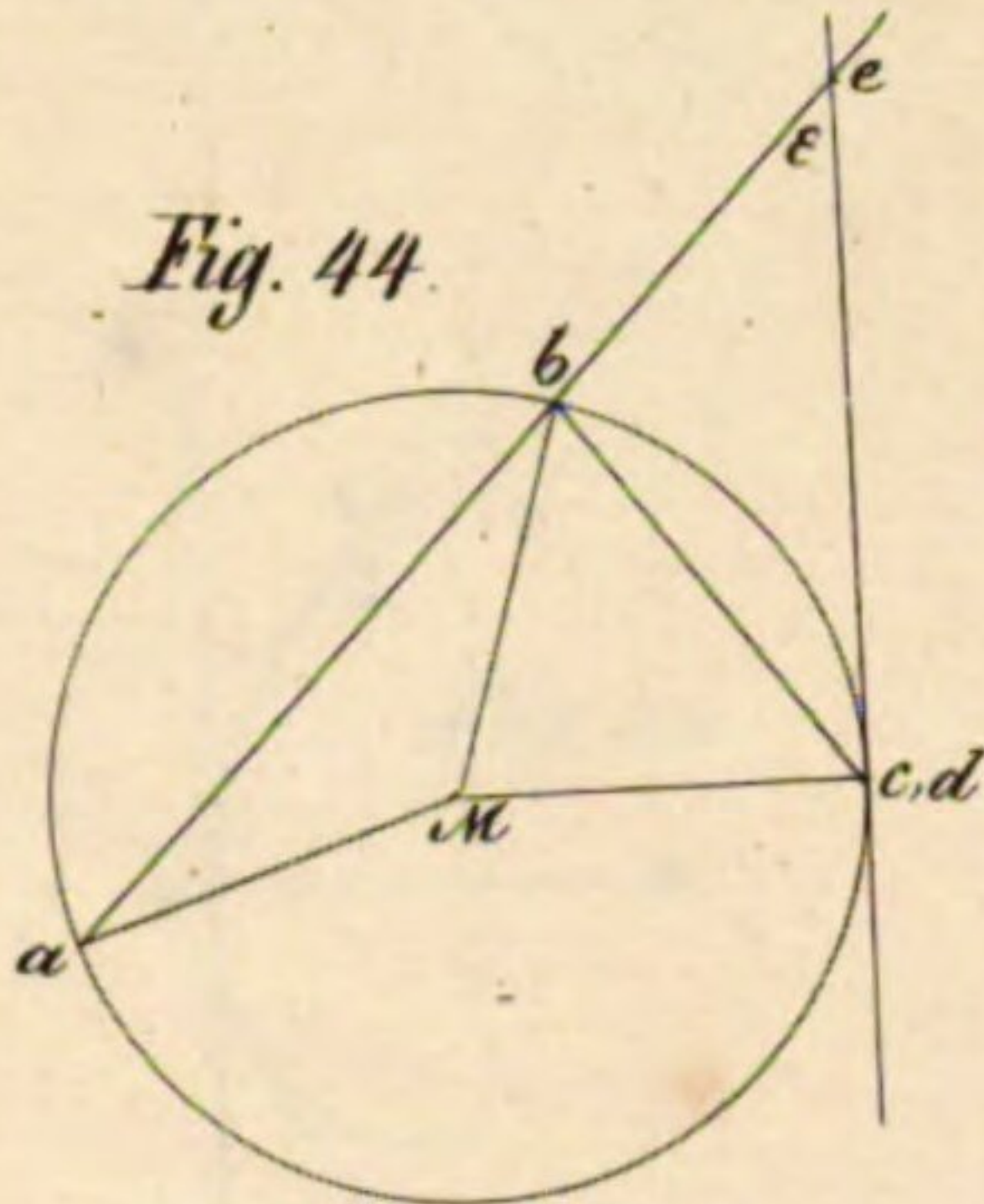
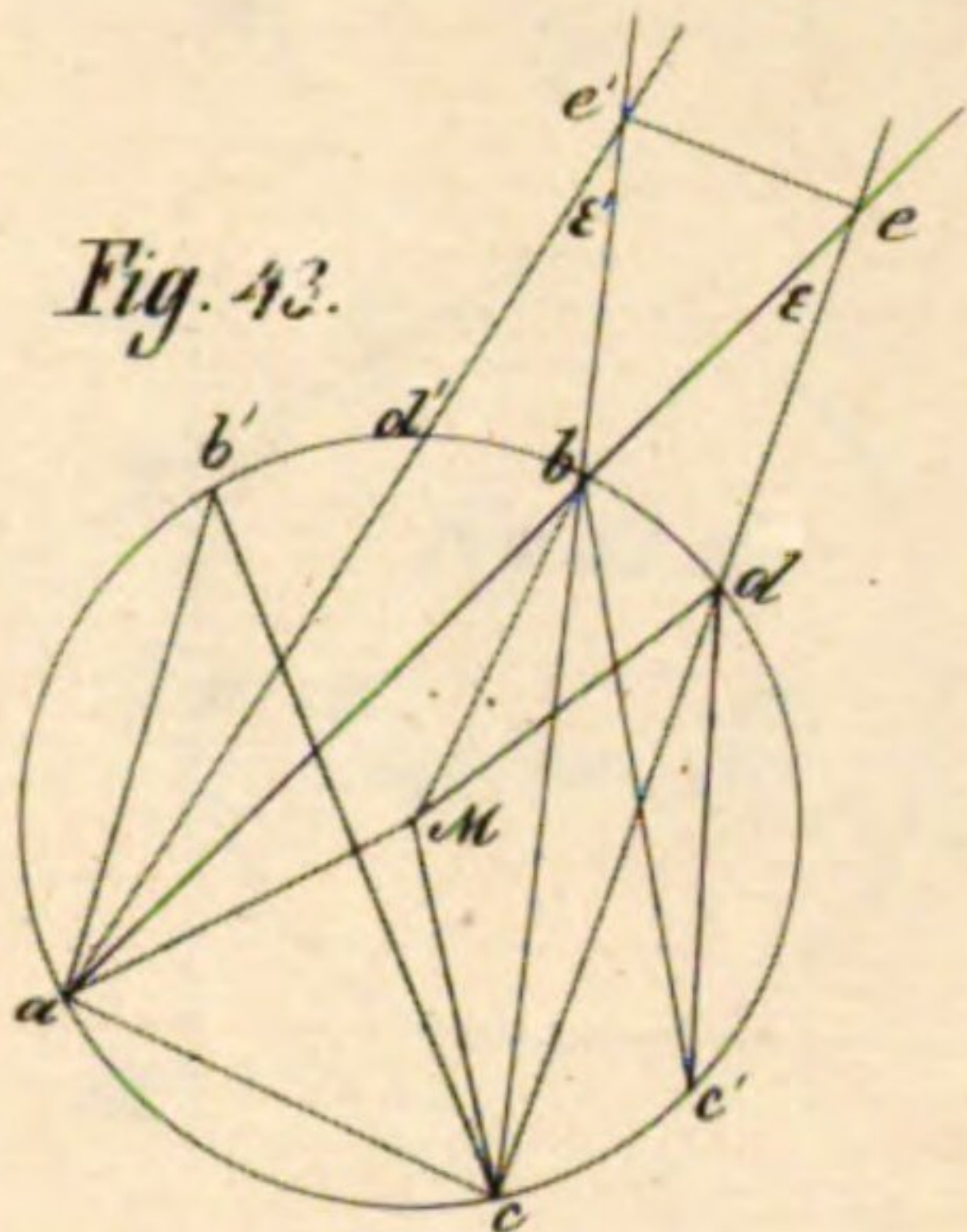
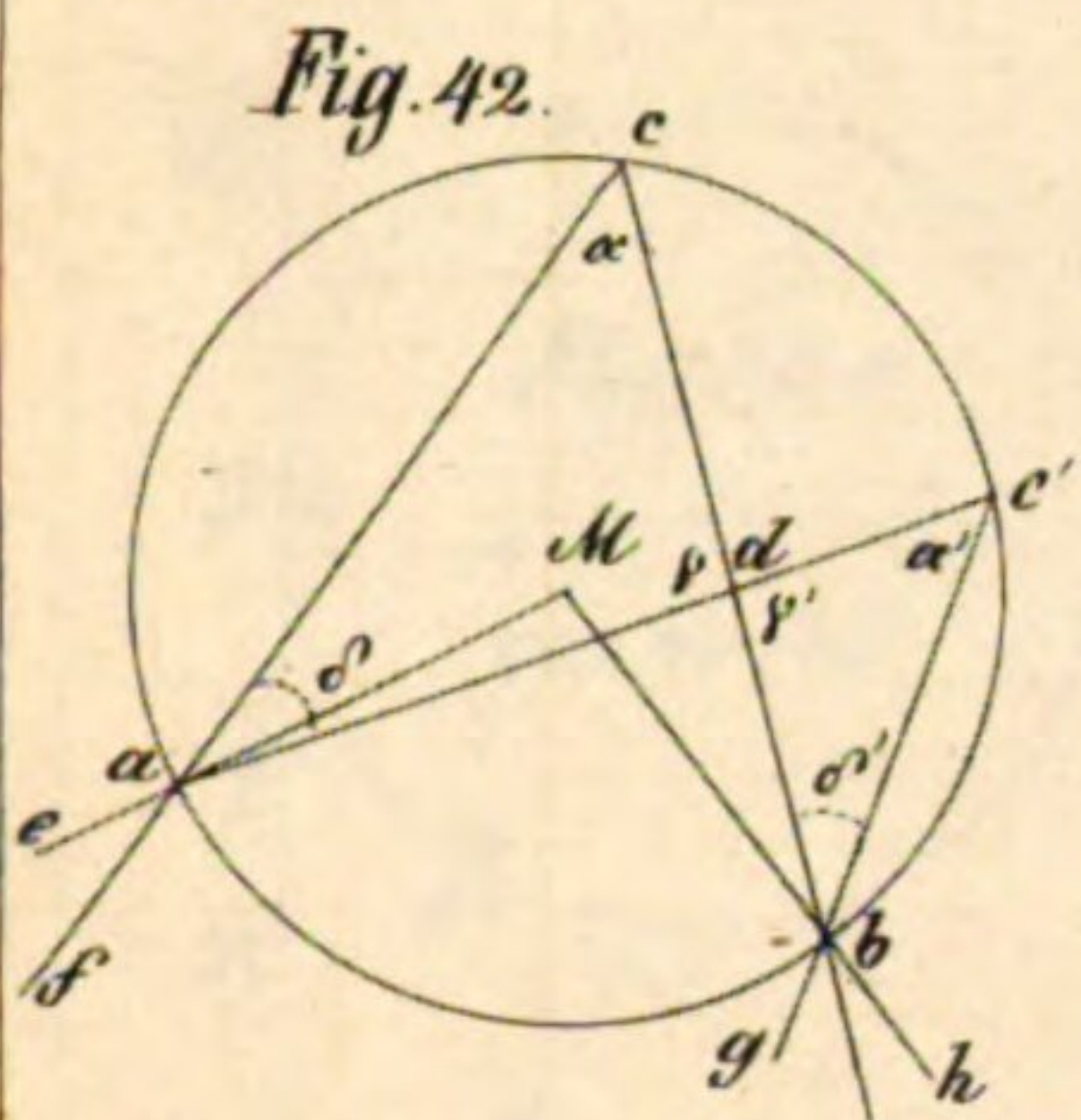
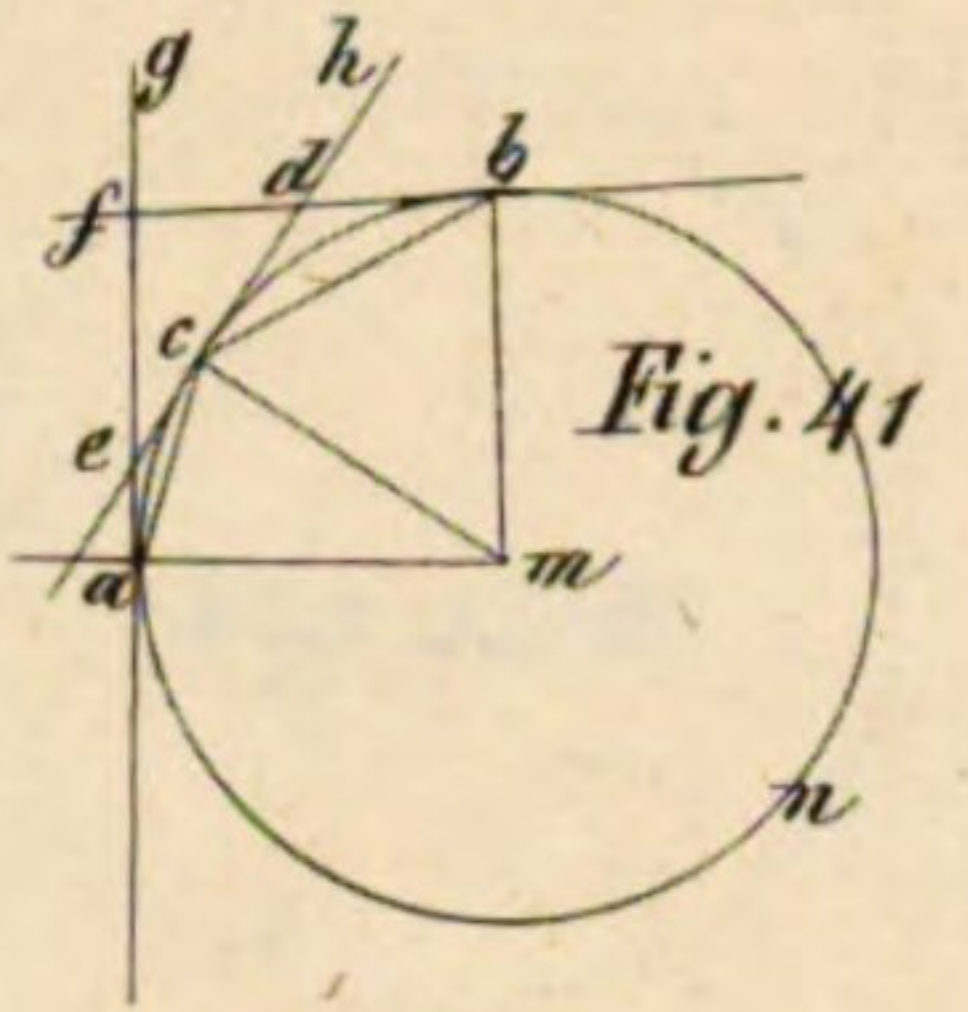
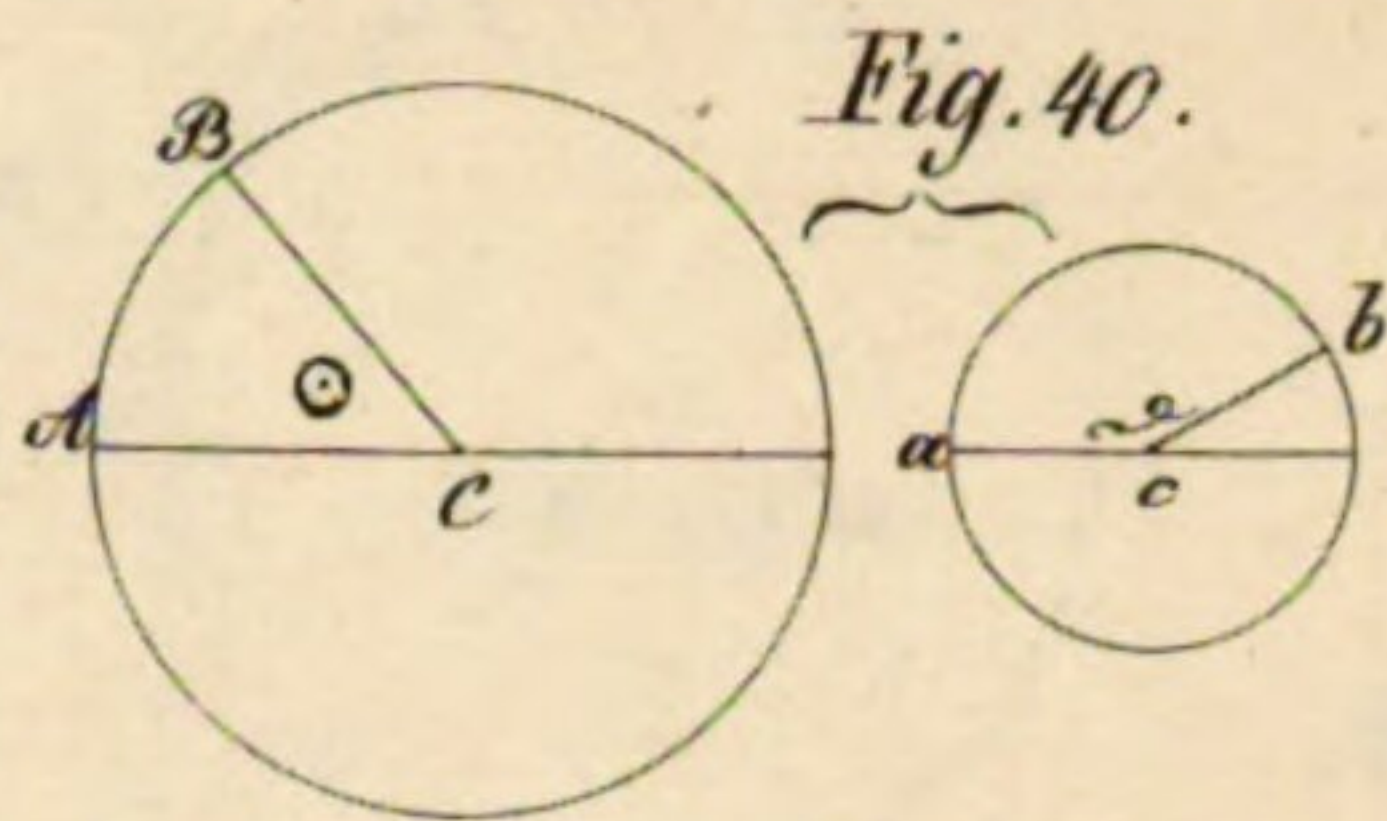
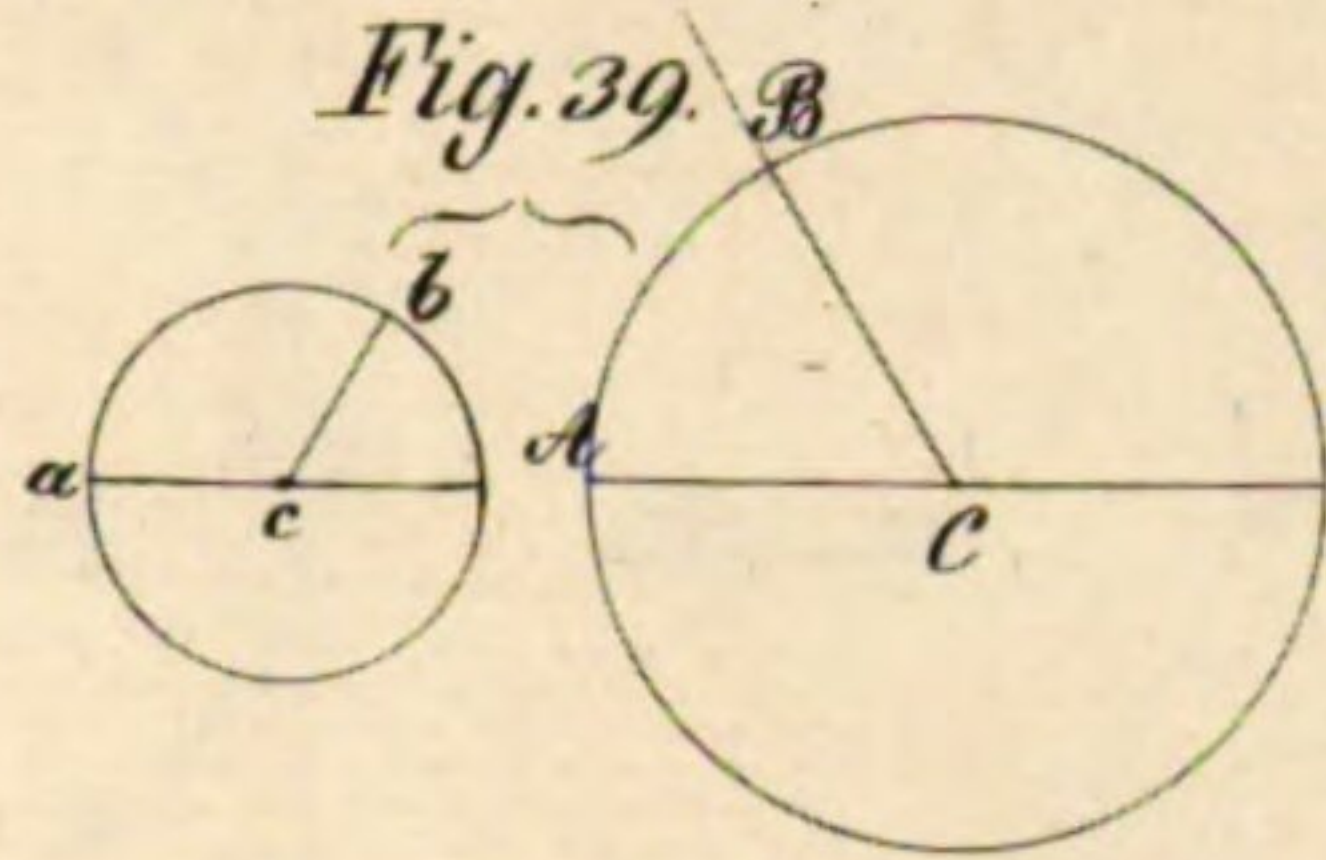
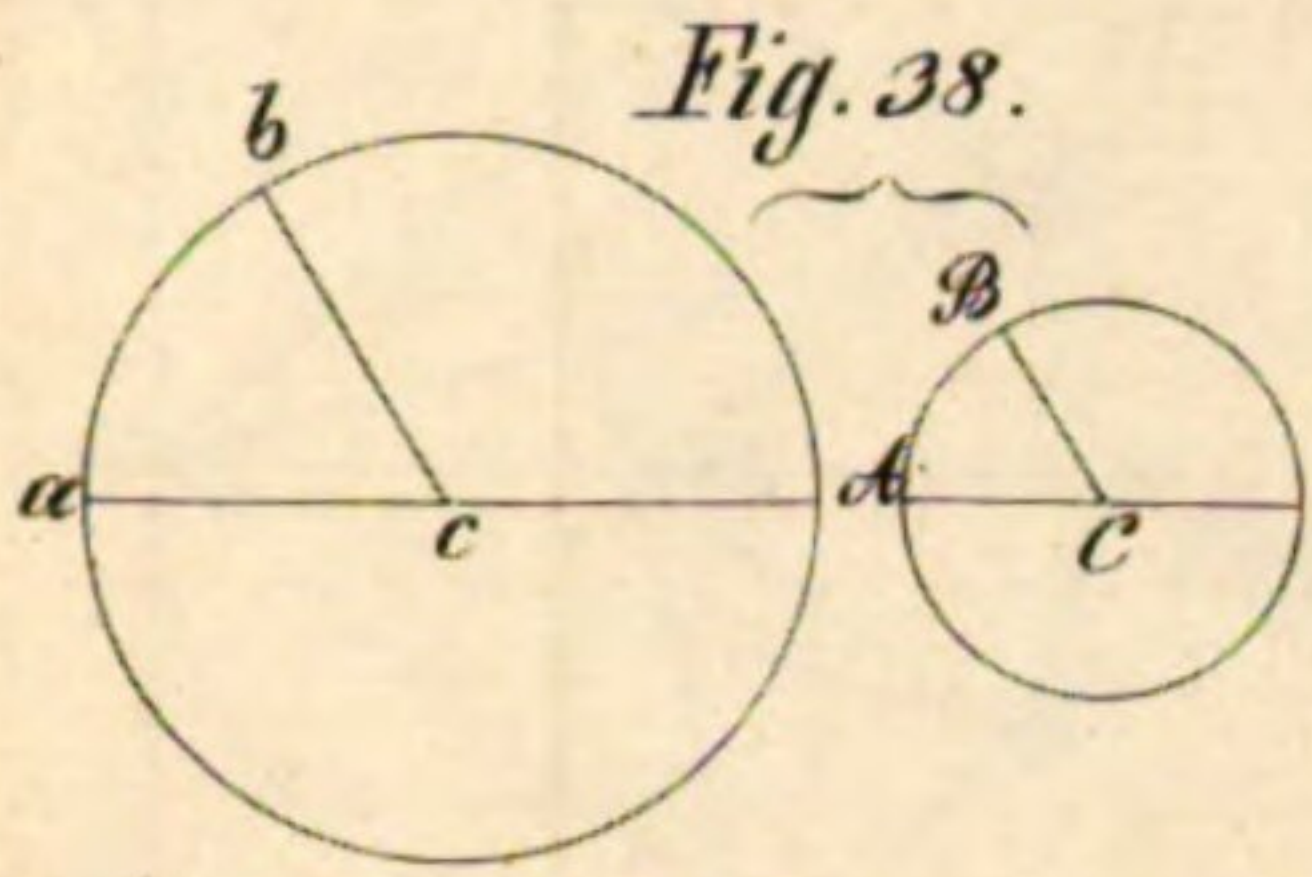
*Spiralis logarithmica
seu logistica angularis.*

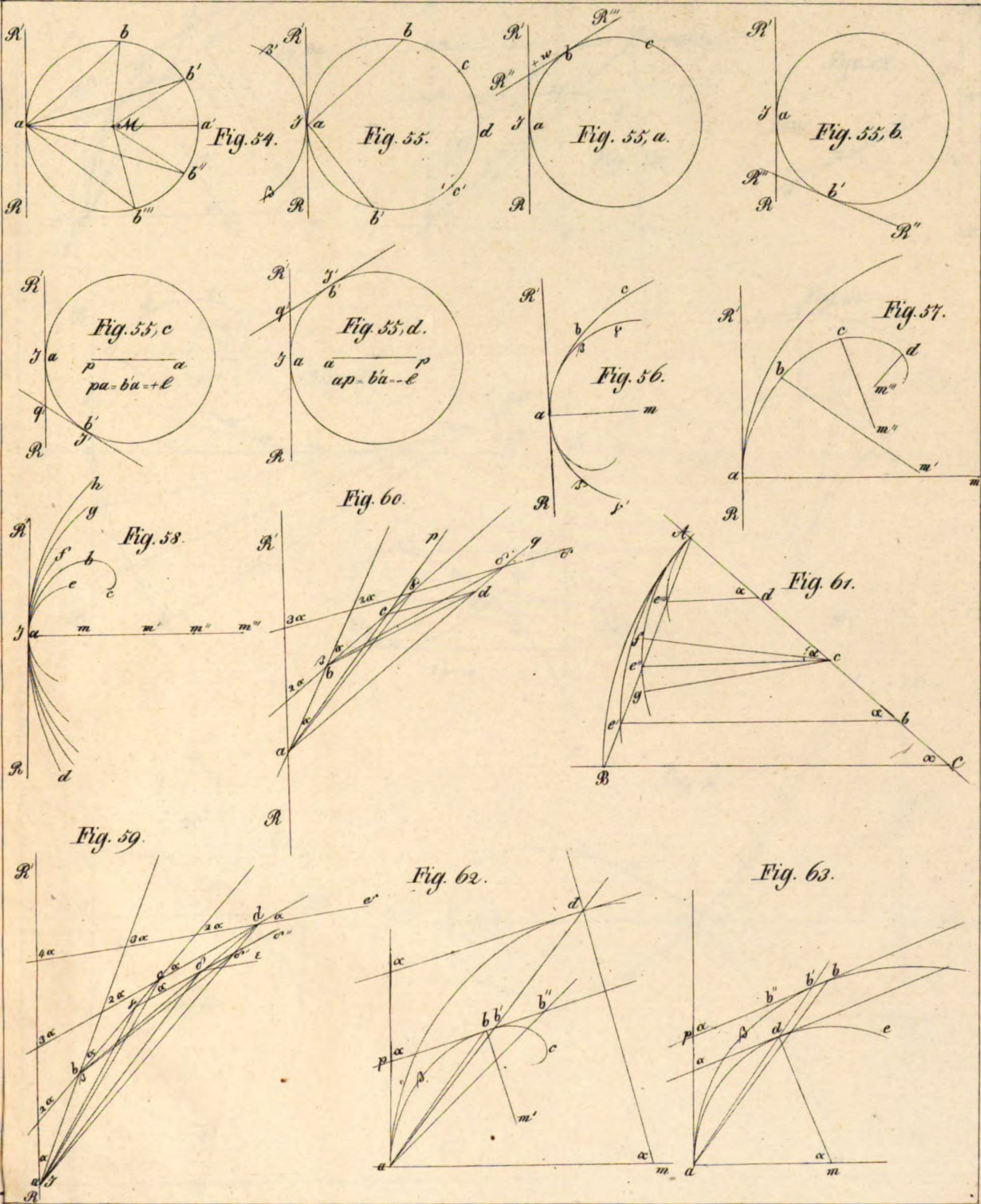
*Spiralis logarithmica
seu logistica longitudinalis.*

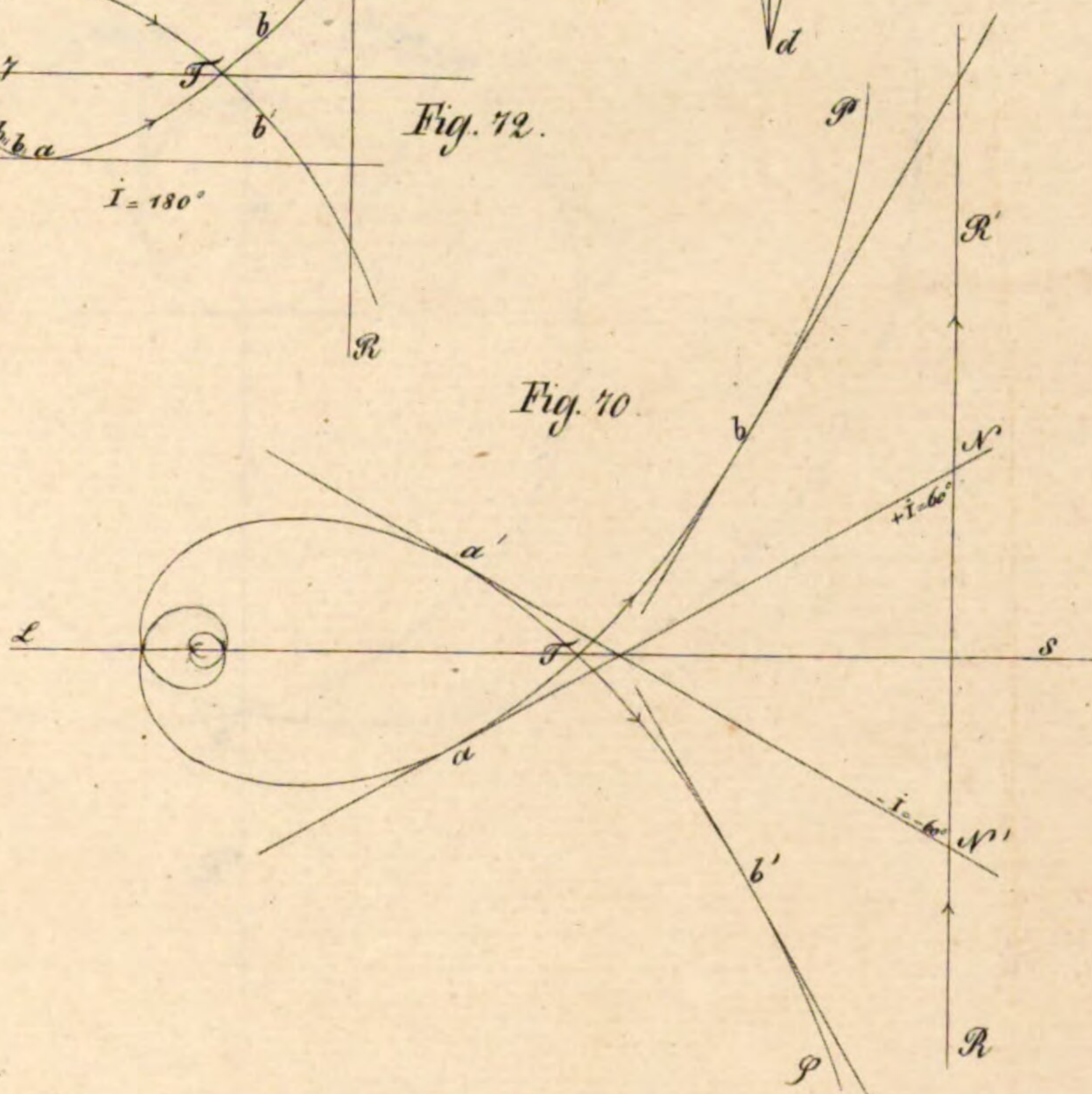
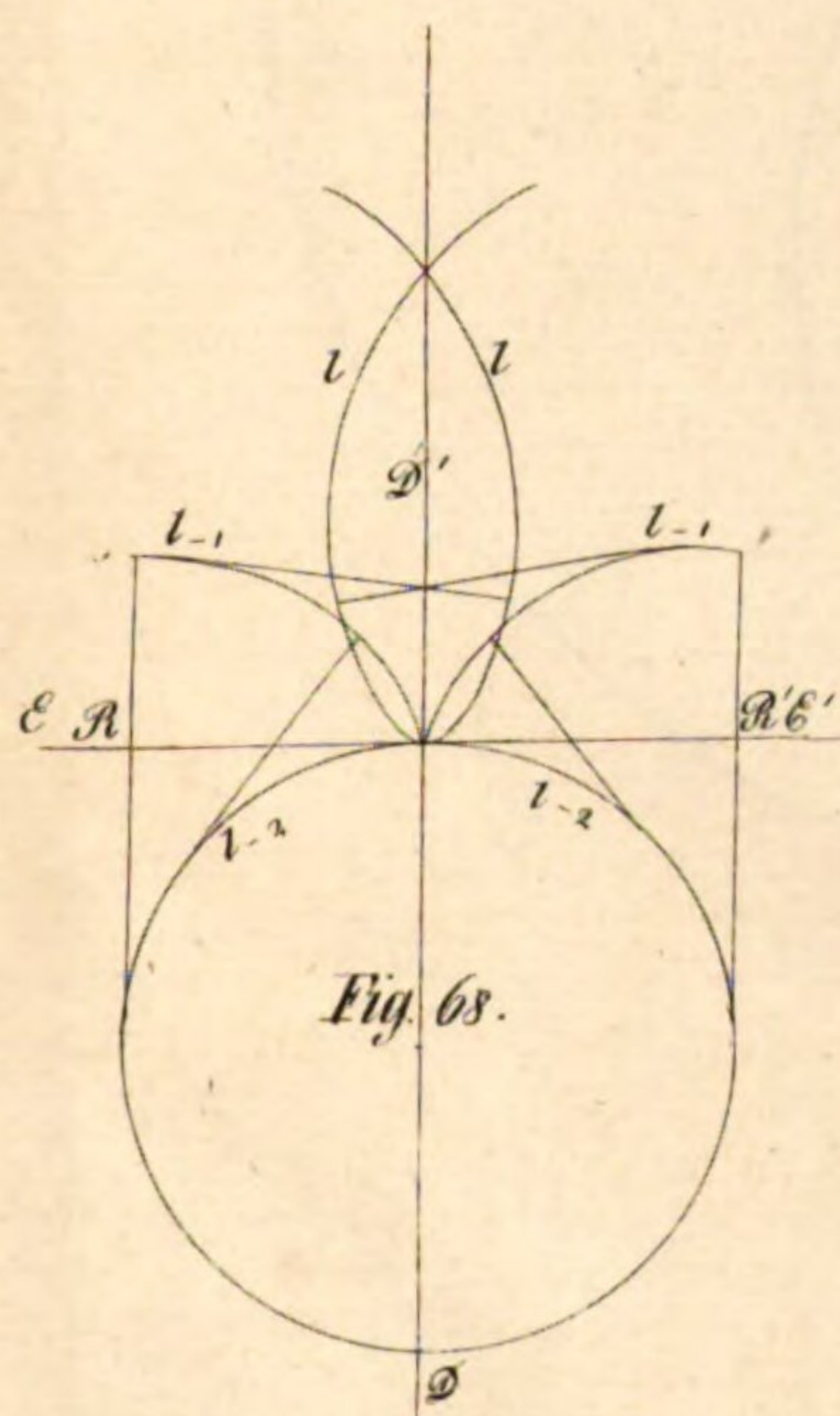
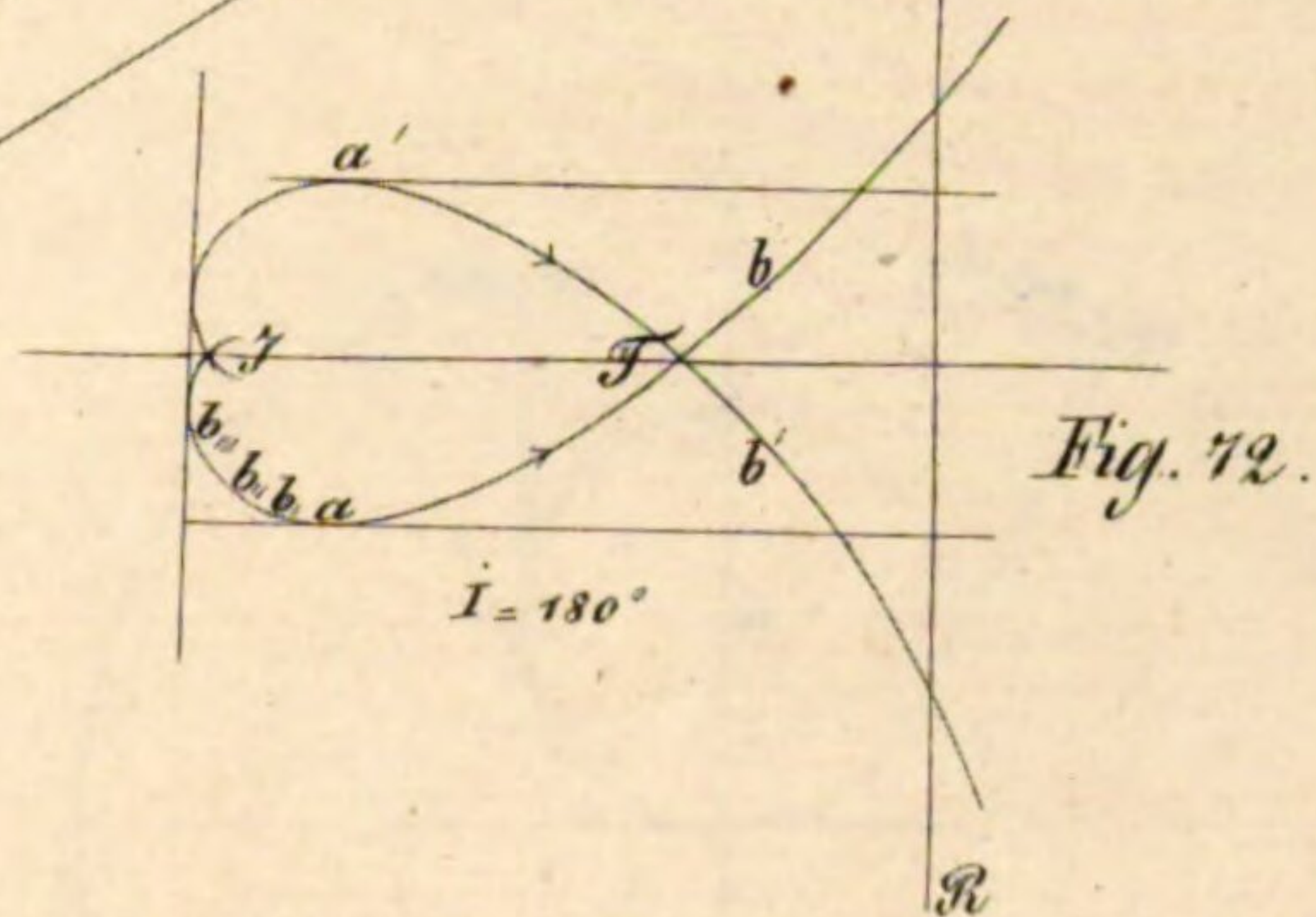
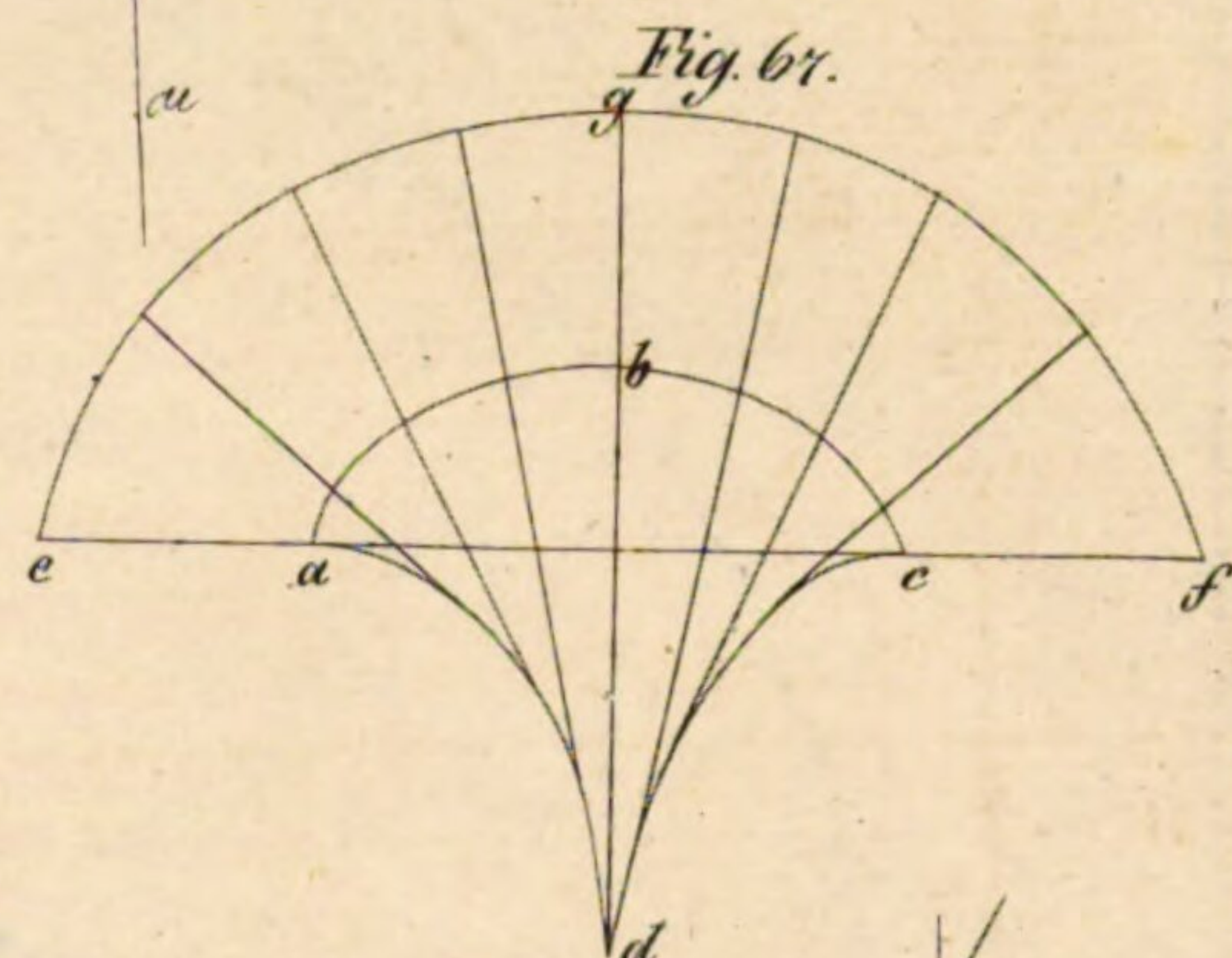
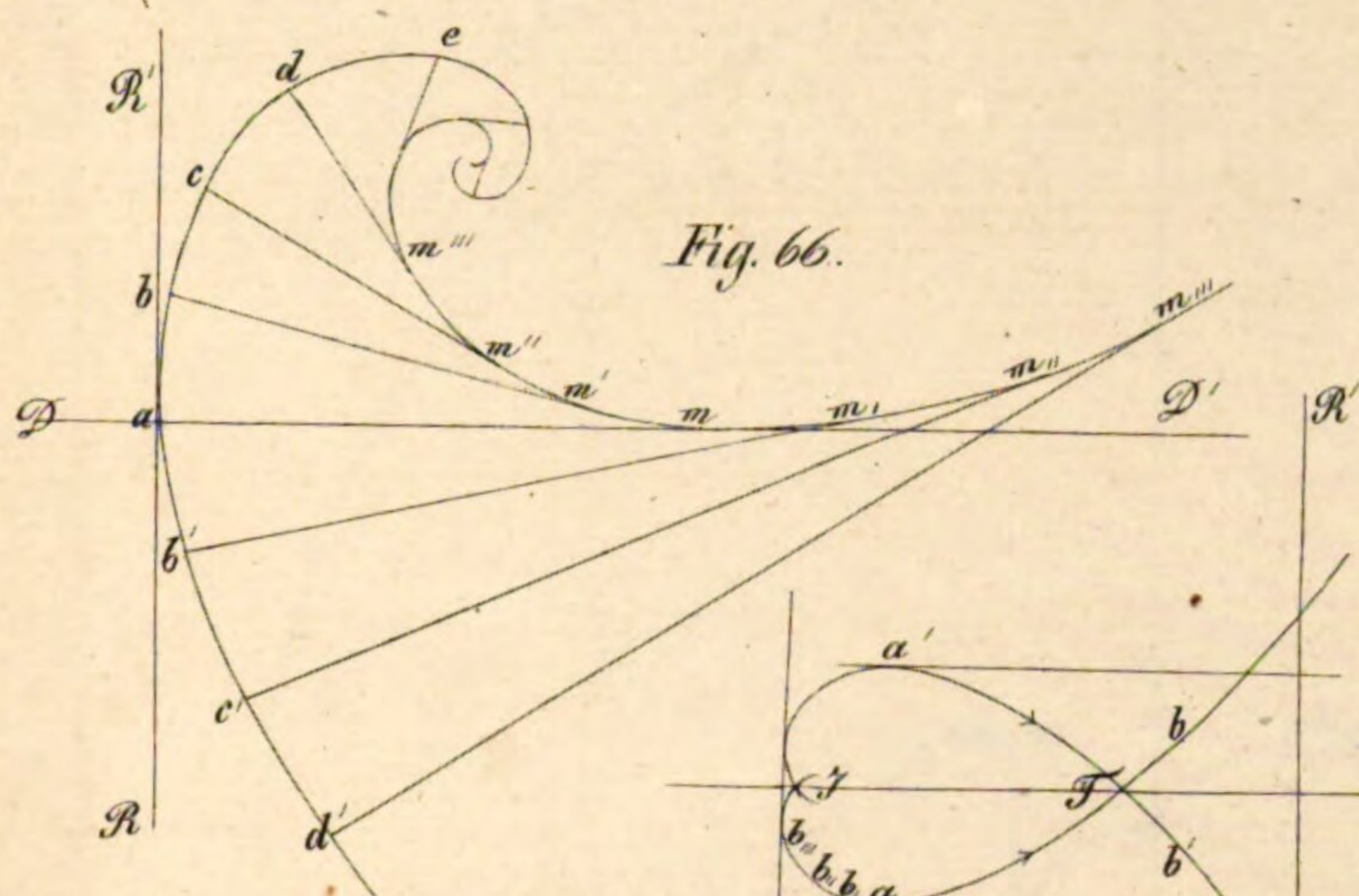
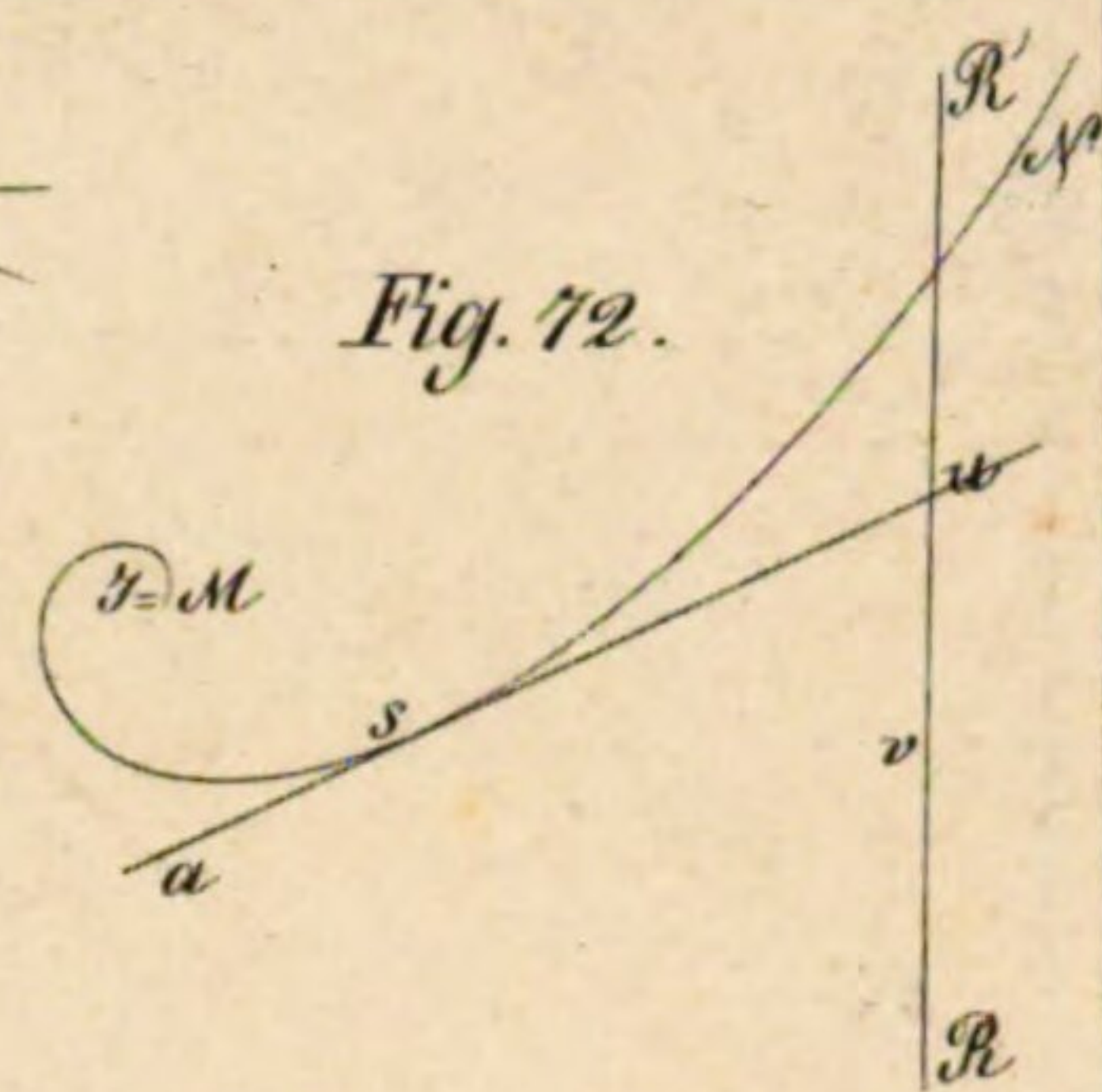
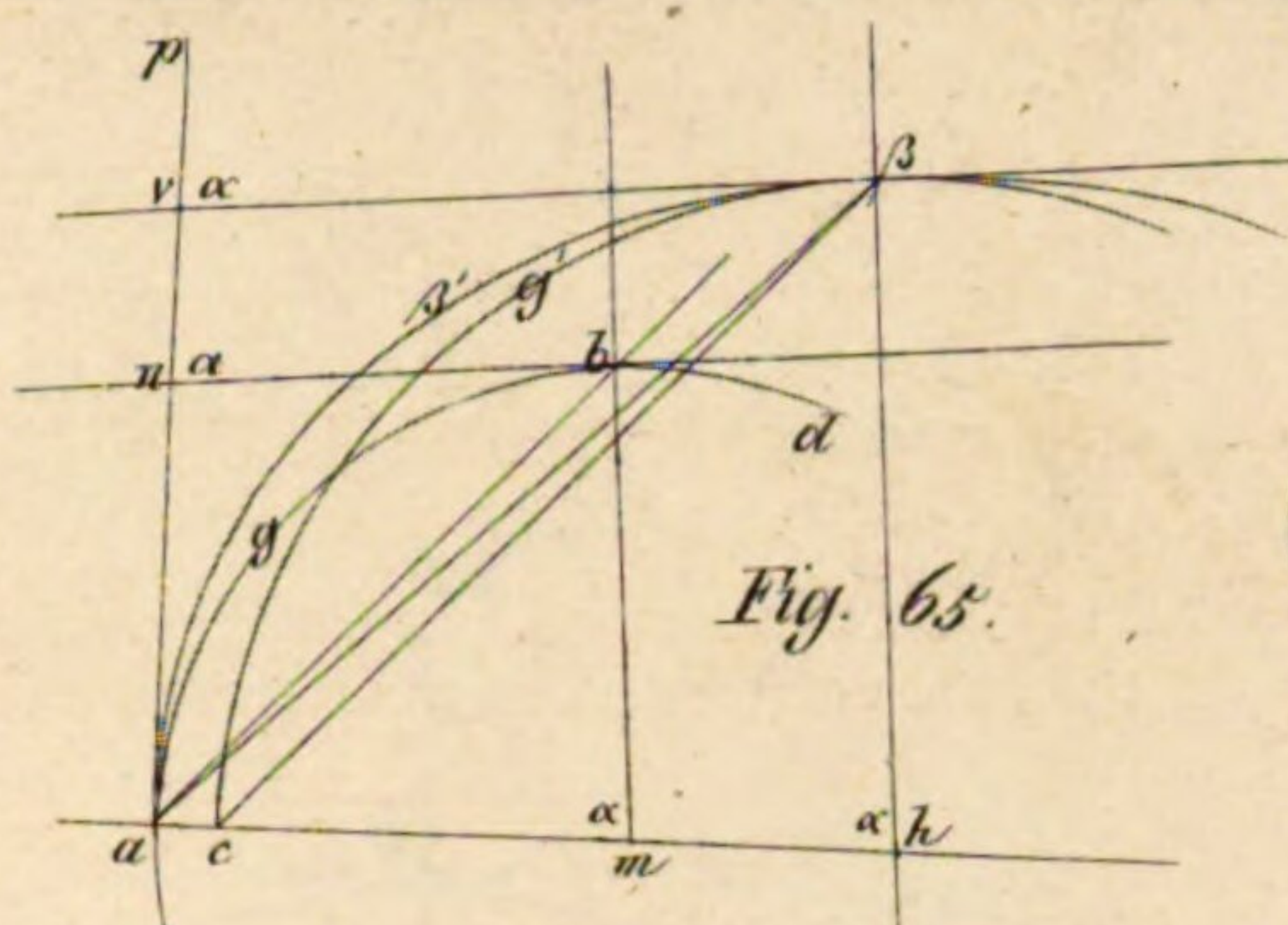
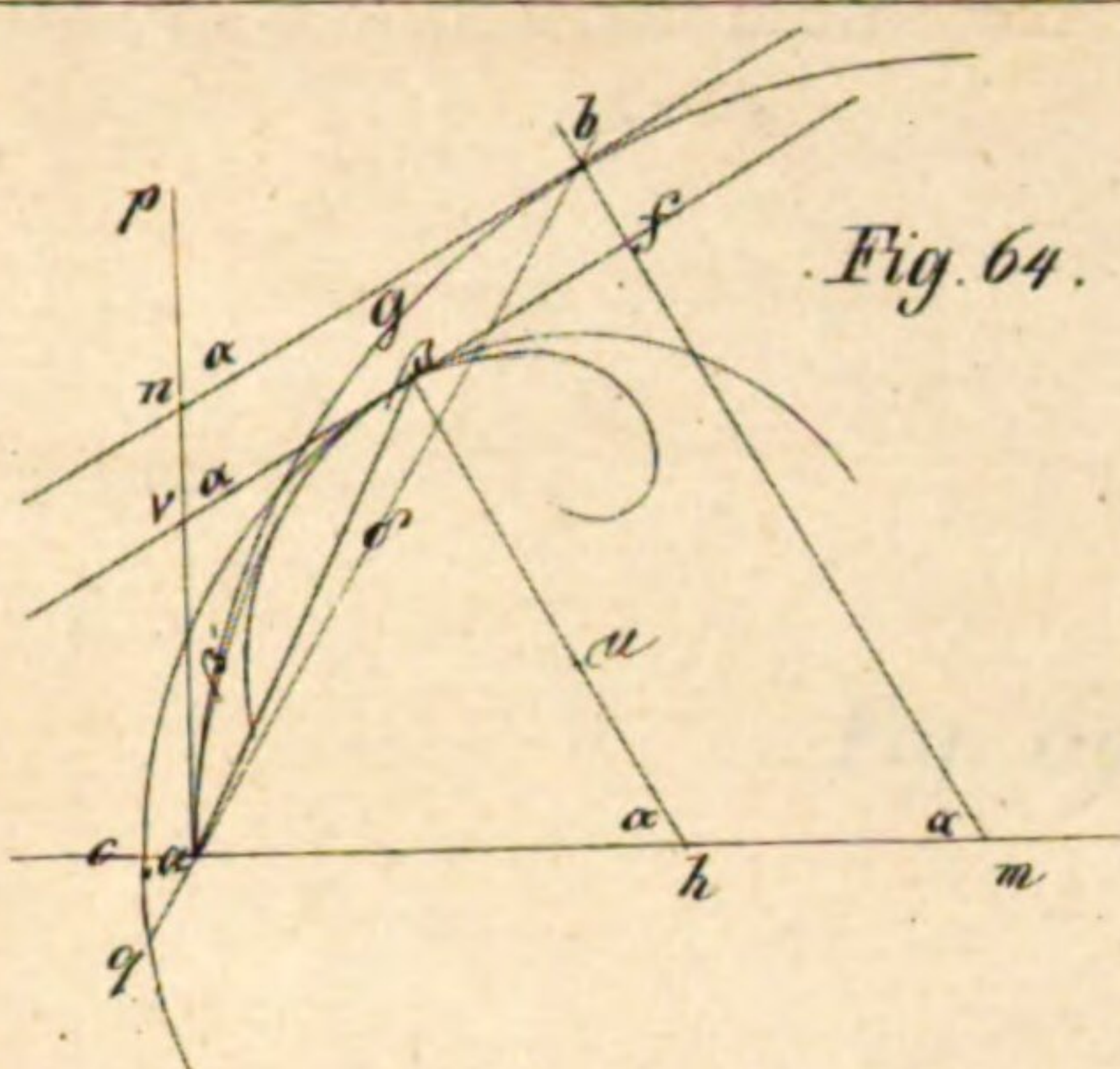
Fig. 25

a $\bar{ab} = \bar{I}$ $I = 360^\circ$ ad Fig. 25. b









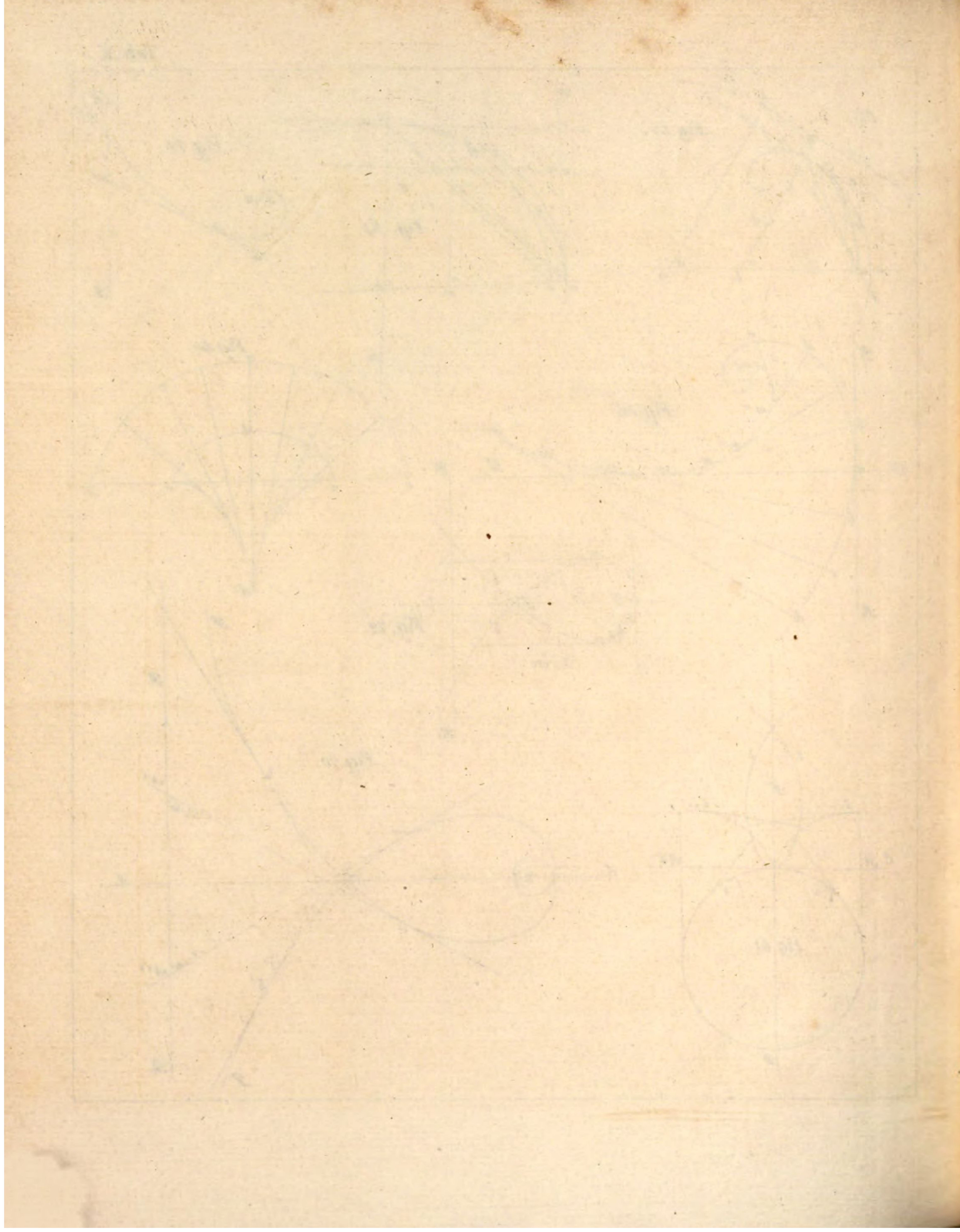


Fig. 69.

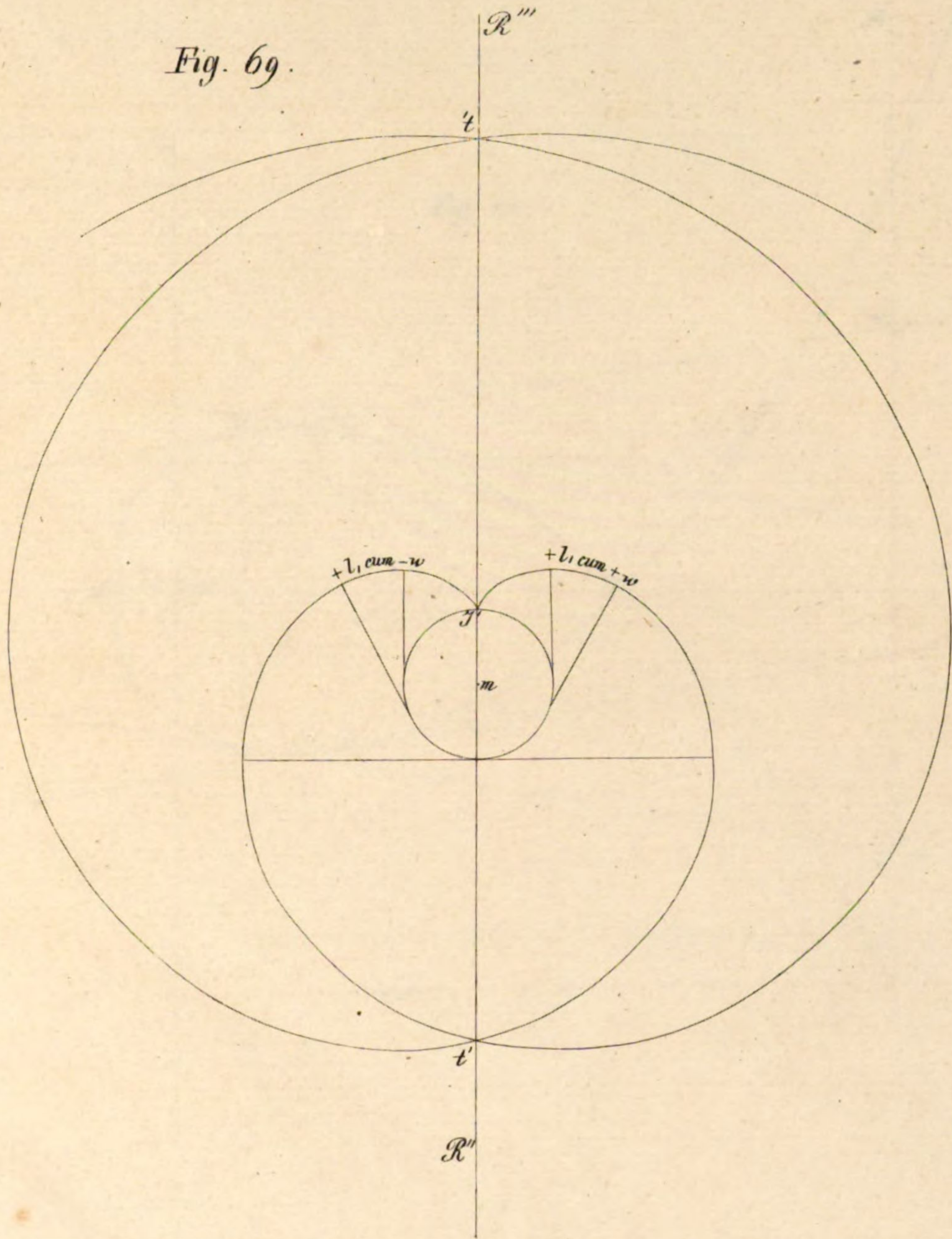
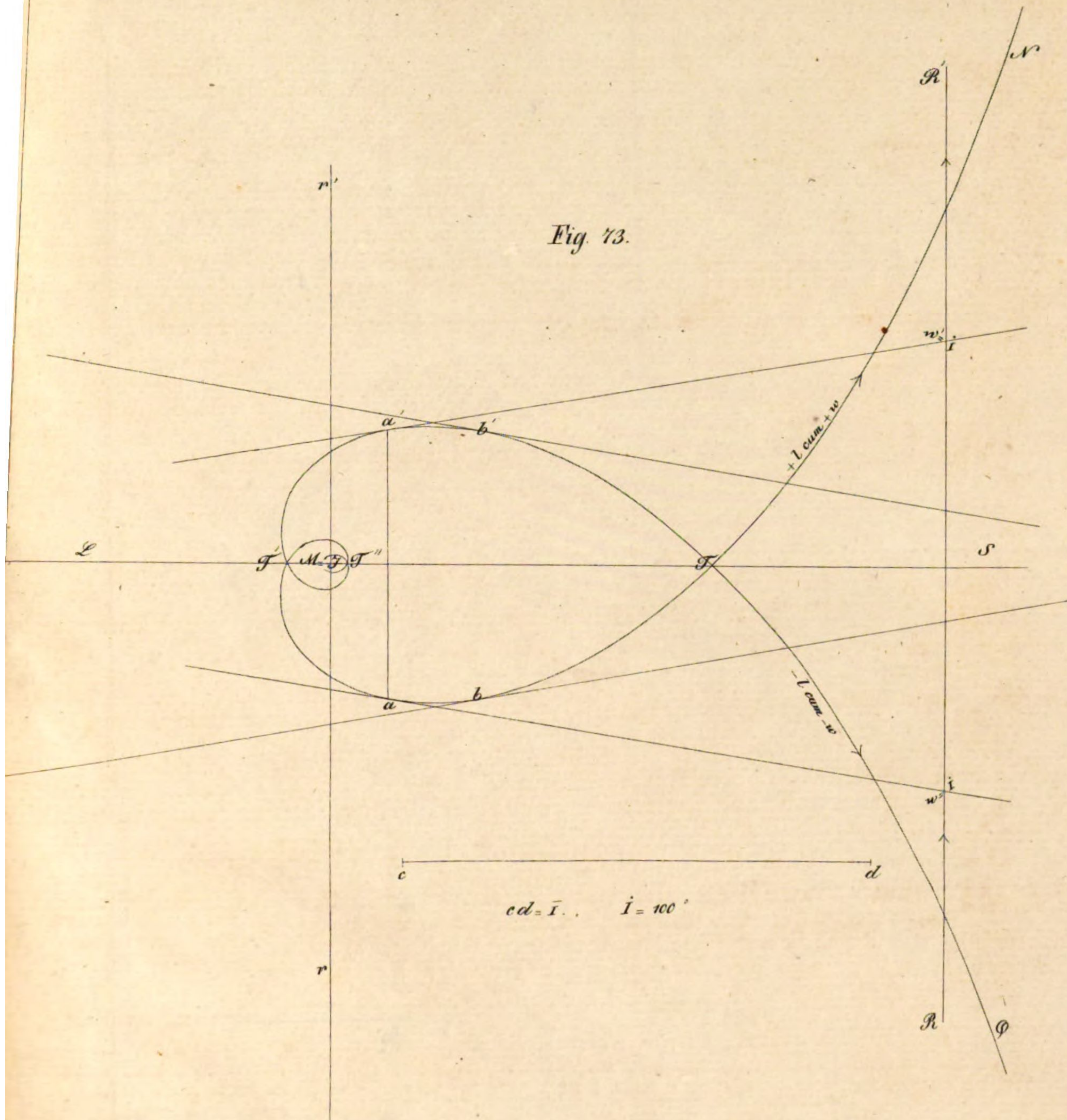
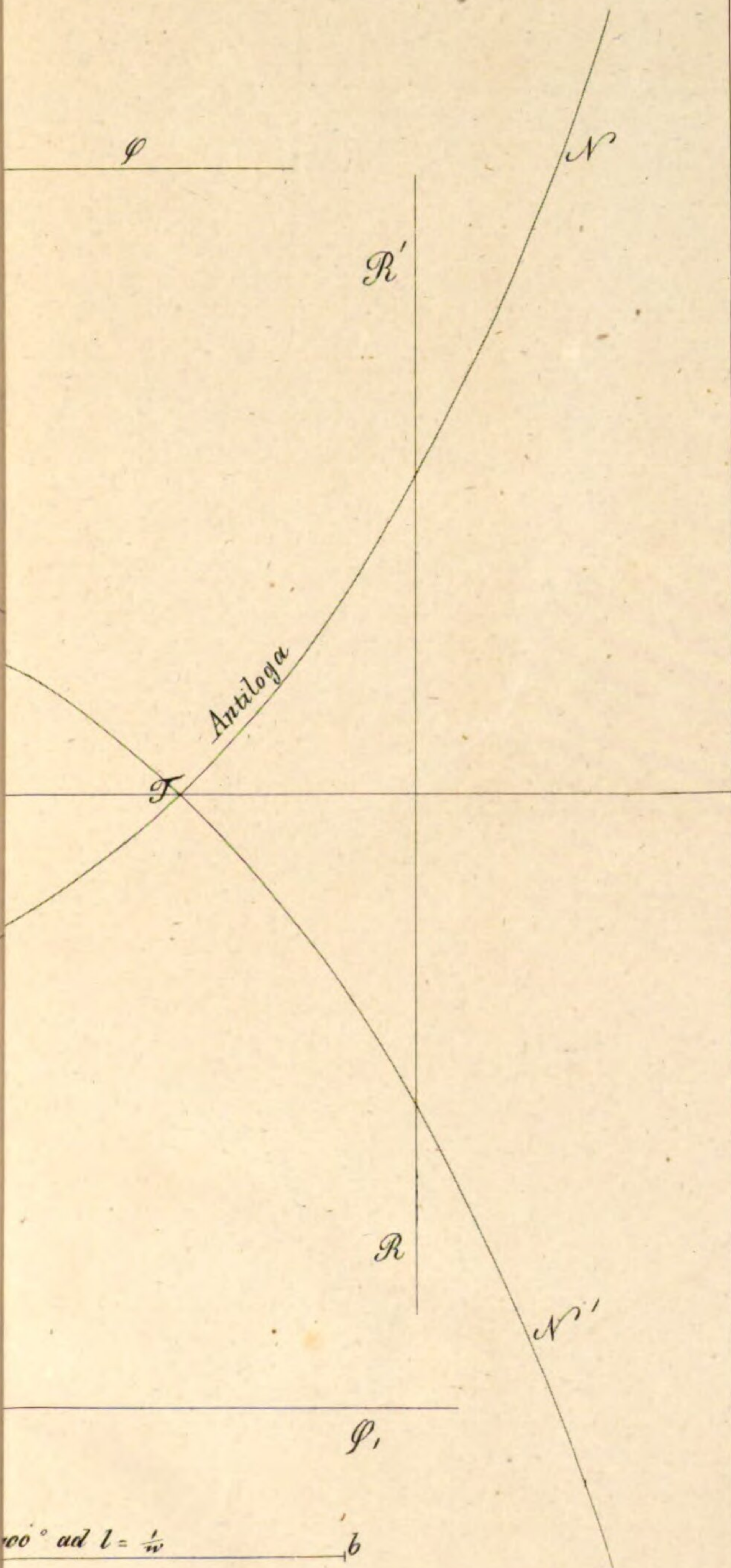


Fig. 73.









Krause, Karl Christian Friedrich,

Karl Christian Friedrich Krause's handschriftlicher Nachlass

Bd.: 6. = II. Abt., Mathematik. I. Nova theoria linearum curvarum. Pars I.
- 1835. - XII, 104 S. : 14 Ill

Göttingen [u.a.] 1835

Ph.u. 293 od-6

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10046250-5